Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 2004

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option économique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PREMIER EXERCICE

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{2e^t}{\sqrt{1+t^2}}$$

1. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$ comprenant les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. (a) Établir, pour tout $t \in [0, +\infty[$: $\quad e^t - t - t^2 > 0 \quad$ et $\quad 1 + t \geqslant \sqrt{1+t^2}$
   (b) En déduire:
   $$\forall t \in [0, +\infty[\,, \quad f(t) > t$$
3. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$u_{n+1} = f(u_n)$$
   (a) Établir que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers ∞.
   (b) Écrire un programme en Pascal qui calcule et affiche le plus petit entier n tel que $u_n > 10^6$
4. On considère l'application $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :
   $$G(x) = \int_{-x}^{+x} f(t)\, dt$$
   (a) Montrer que G est impaire.
   (b) Montrer que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $G'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (c) Quelle est la limite de $G(x)$ lorsque x tend vers ∞ ?
   (d) Étudier le sens de variation de G et dresser le tableau de variation de G sur $\mathbb{R}$ comprenant les limites de G en $-\infty$ et en $+\infty$.

DEUXIEME EXERCICE

On note $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre trois à éléments réels, I la matrice identité de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, 0 la matrice nulle de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

On considère, pour toute matrice A de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, les ensembles $E_1(A)$ et $E_2(A)$ suivants :

$$\begin{aligned} E_1(A) &= \{M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}); A\,M = M\} \\ E_2(A) &= \{M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}); A^2M = AM\} \end{aligned}$$

Partie I

1. Montrer que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$

   On admettra que $E_2(A)$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$

2. (a) Établir : $E_1(A) \subset E_2(A)$

   (b) Montrer que, si A est inversible, alors $E_1(A) = E_2(A)$

3. (a) Établir que, si $A - I$ est inversible, alors $E_1(A) = \{0\}$

   (b) Un exemple : Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_1(B)$ et $E_2(B)$

Partie II

On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer les valeurs propres et les sous-espaces propres de C.

2. En déduire une matrice diagonale D, dont les termes diagonaux sont dans l'ordre croissant, et une matrice inversible P, dont les éléments de la première ligne sont égaux à 1, telles que $C = P\,D\,P^{-1}$.

3. Soit $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}M$.

   Montrer : $M \in E_1(C) \Longleftrightarrow N \in E_1(D)$.

4. Montrer que $N \in E_1(D)$ si et seulement s'il existe trois réels a, b, c tels que $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. En déduire l'expression générale des matrices de $_1(C)$ et déterminer une base et la dimension de $_1(C)$.

6. Donner l'expression générale des matrices de $E_2(C)$ et déterminer une base et la dimension de $E_2(C)$.

   Est-ce que $E_1(C) = E_2(C)$?

TROISIÈME EXERCICE

Une urne contient des boules blanches, des boules rouges et des boules vertes.

- La proportion de boules blanches est b.
- La proportion de boules rouges est r.
- La proportion de boules vertes est v.

Ainsi, on a.: $0 < b < l$, $\quad 0 < r < l$, $\quad 0 < v < 1$ avec $b + r + v = 1$.

On effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête au premier changement de couleur.

Pour tout entier naturel i supérieur ou égal à l, on note $_i$ (respectivement R_i; V_i) l'événement " la $i$ème boule tirée est blanche (respectivement, rouge ; verte)"

On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

Par exemple, lorsque le résultat des tirages est V_1, V_2, B_3, la variable aléatoire X prend la valeur 3.

Partie I

1. Préciser les valeurs possibles de X.
2. Montrer : $\forall k \in \mathbb{N} - \{0,1\}, \quad P(X=k) = (1-b)\,b^{k-1} + (1-r)\,r^{k-1} + (1-v)\,v^{k-1}$
3. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que :

$$E(X) = \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-r} + \frac{1}{1-v} - 2$$

Partie II

On considère la fonction f de classe C^2 sur $]0,1[\times]0,1[$ définie par :

$$\forall (x,y) \in]0,1[\times]0,1[,\ f(x,y) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{x+y}$$

1. Calculer, pour tout $(x,y) \in]0,1[\times]0,1[$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
2. Montrer qu'il existe un unique point I de $]0,1[\times]0,1[$ en lequel f est susceptible de posséder un extremum local et déterminer I.
3. Montrer que f admet en I un minimum local.
4. (a) Exprimer $E(X)$ en fonction de $f(b,r)$.

   (b) Que peut-on dire de $E(X)$ lorsque $b = r = v = \dfrac{1}{3}$?

Partie III

1. Montrer que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \dfrac{1}{3^t}\,dt$ est convergente et déterminer sa valeur.

   On rappelle que $3^t = e^{t\ln(3)}$.

   On note $\alpha = \int_2^{+\infty} \dfrac{1}{3^t}\,dt$ et on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g(t) = 0 & \text{si } t \in]-\infty; 2[\\ g(t) = \dfrac{1}{\alpha 3^t} & \text{si } t \in [2; +\infty[\end{cases}$$

2. Vérifier que g est une densité de probabilité.

   On note Y une variable aléatoire admettant g comme densité.
3. Montrer que Y admet une espérance et calculer cette espérance.
4. On note Z la variable aléatoire égale à la partie entière de Y. On rappelle que la partie entière d'un nombre réel x est le plus grand entier inférieur ou égal à x.

   (a) Déterminer la loi de probabilité de Z.

   (b) Comparer la loi de probabilité de X lorsque $b = r = v = \dfrac{1}{3}$ et la loi de probabilité de Z.

-FIN -