Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 2004

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PROBLEME I

Partie I : Etude de la fonction $x \longmapsto x \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt$

On note $F :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ et $G :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ les applications définies, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$ par :

$$F(x) = \int_1^x \frac{\sin u}{u} du \quad \text{et} \quad G(x) = \int_1^x \frac{\cos u}{u} du$$

1. (a) Montrer, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$:

$$F(x) = -\frac{\cos x}{x} + \cos 1 - \int_1^x \frac{\cos u}{u} du.$$

En déduire que F admet une limite finie en $+\infty$. On note α cette limite.

(b) De manière analogue, montrer que G admet une limite finie en $+\infty$. On note β cette limite.

(c) En déduire que, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, les intégrales $\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$ et $\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du$ convergent, et que :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \alpha - F(x) \quad \text{et} \quad \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du = \beta - G(x).$$

2. (a) Montrer, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$ et tout réel $t \in]0;+\infty[$:

$$\int_0^t \frac{\sin t}{t+x} dt = \cos x \int_x^{x+t} \frac{\sin u}{u} du - \sin x \int_x^{x+t} \frac{\cos u}{u} du$$

(b) En déduire que, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt$ converge et que :

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt = \cos x \int\limits_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du - \sin x \int\limits_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du$$

On note $A :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, par :

$$A(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt$$

3. Montrer que l'application A est de classe C^2 sur $]0;+\infty[$ et que, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$:

$$A''(x) + A(x) = \frac{1}{x}$$

4. Établir que $A(x)$ et $A'(x)$ tendent vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

5. (a) Montrer :et $\forall x \in]0;1]$, $\quad 0 \leqslant \int\limits_x^1 \frac{\cos u}{u} du \leqslant -\ln x$

   (b) En déduire que $\sin x \int\limits_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

   (c) Montrer que l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$ converge, et établir que $A(x)$ tend vers $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

Partie II : Etude de la fonction x donne $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$

1. Montrer que, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$ et tout entier naturel k, l'application $t \mapsto t^k e^{-xt}$ est bornée sur $[0;+\infty[$, et en déduire que l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2} dt$ converge.

   On note, pour tout entier naturel k, B_k :$]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout réel $x \in]0,+\infty[$, par :

$$B_k(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2} dt.$$

2. (a) Montrer, en utilisant par exemple l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad |e^u - 1 - u| \leqslant \frac{u^2}{2} e^{|u|}$$

   (b) En déduire, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, pour tout entier naturel k et pour tout réel h tel que $0 < |h| \leqslant \frac{x}{2}$:

$$\left| \frac{B_k(x+h) - B_k(x)}{h} + B_{k+1}(x) \right| \leqslant \frac{|h|}{2} B_{k+2}(\frac{x}{2})$$

(c) Montrer que, pour tout entier naturel k, B_k est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad B_k'(x) = -B_{k+1}(x)$$

(d) En déduire que B_0 est de classe C^2 sur $]0;+\infty[$ et que, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$:

$$B_0''(x) + B_0(x) = \frac{1}{x}$$

3. Montrer, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$:

$$0 \leqslant B_0(x) \leqslant \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant -B_0'(x) \leqslant \frac{1}{x}$$

et en déduire les limites de $B_0(x)$ et $B_0'(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

4. (a) Montrer :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad e^{-\sqrt{x}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t^2} dt \leqslant B_0(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt.$$

(b) Justifier, pour tout réel $y \in [0;\frac{\pi}{2}[$: $\int\limits_0^y u = \int\limits_0^{\tan y} \frac{1}{1+t^2} dt$, et en déduire :et $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$.

(c) En déduire la limite de $B_0(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

Calcul de l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$

On considère l'application $\varphi :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, par :

$$\varphi(x) = A(x) - B_0(x),$$

où A a été définie dans la Partie **I** et B_0 a été définie dans la Partie **II**.
On note $U :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, par :

$$U(x) = (\varphi(x))^2 + (\varphi'(x))^2$$

1. Montrer que U est constante sur $]0;+\infty[$.

2. Quelle est la limite de $U(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?

3. En déduire :et $\forall x \in]0;+\infty[, \quad A(x) = B_0(x)$.

4. Quelle est la valeur de $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$?

DEUXIÈME PROBLÈME

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
$\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n et $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes réelles à n lignes.
Une matrice M de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ ou de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est dite positive si et seulement si tous les coefficients de M sont positifs ou nuls. On notera alors $M \geqslant 0$.

Une matrice M de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ ou de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est dite strictement positive si et seulement si tous les coefficients de M sont strictement positifs. On notera alors $M > 0$.
Si M et N sont deux matrices de ou deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ ou de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la notation $M \geqslant N$ (respectivement $M > N$) signifie que $M - N \geqslant 0$ (respectivement $M - N > 0$).
Une matrice M de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est dite productive si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes : M est positive et il existe une matrice positive P de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $P - MP > 0$.

Etude d'exemples

1. En considérant $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, montrer que la matrice $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est productive.

2. Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas productive.

Caractérisation des matrices positives

Soit M une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que, si M est positive, alors, pour toute matrice positive X de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit MX est positif.

2. Réciproquement, montrer que, si, pour toute matrice positive X de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit MX est positif, alors la matrice M est positive.

Caractérisation des matrices productives

1. Soit A une matrice productive de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient de la i-ème ligne et de la j-ème colonne est noté a_{ij}, et P une matrice positive de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $P - AP > 0$. On note $p_1, \ldots, p_n$ les coefficients de la matrice colonne P.

   (a) Montrer que $P > 0$.

   (b) Soit X appartenant à $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X \geqslant AX$. On note $x_1, \ldots, x_n$ les coefficients de la matrice colonne X.
   On désigne par c le plus petit des réels $\dfrac{x_j}{p_j}$ lorsque l'entier j décrit l'ensemble $1, \ldots, n$ et k un indice tel que $c = \dfrac{x_k}{p_k}$.
   Etablir que $c(p_k - \sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj}p_j) \geqslant 0$. En déduire que $c \geqslant 0$ et que X est positive.

   (c) Soit X appartenant à $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X = AX$. En remarquant que $-X \geqslant A(-X)$, montrer que X est nulle.
   En déduire que $I_n - A$ est inversible, où I_n est la matrice identité de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

   (d) Montrer que, pour toute matrice positive X de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la matrice $Y = (I_n - A)^{-1}X$ est positive (on pourra utiliser **III.l.b**).
   En déduire que $(I_n - A)^{-1}$ est positive.

2. Dans cette question, on considère une matrice positive B de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $I_n - B$ soit inversible et telle que $(I_n - B)^{-1}$ soit positive. On note $V = (I_n - B)^{-1}U$, où U est la matrice de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
Montrer que $V - BV > 0$. Conclure.

3. Donner une caractérisation des matrices productives.
4. Application : Soit M une matrice positive de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $2M^2 = M$.

Vérifier que $(I_n - M)(I_n + 2M) = I_n$ et en déduire que M est productive.