Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 2005

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option économique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

On considère les éléments suivants de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note E le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par I, J et K.
Pour toute matrice M de E, on note $M^0 = I$ et si M est inversible, on note, pour tout entier naturel k, $M^{-k} = (M^{-1})^k$, et on rappelle qu'alors M^k est inversible et que $(M^k)^{-1} = M^{-k}$.

1. Déterminer la dimension de E.

2. Calculer J^2, JK, KJ et K^2.

3. Soit la matrice $L = I + J$.

   (a) Montrer, pour tout entier naturel n : $L^n = I + nJ + \dfrac{n(n-1)}{2}K$.

   (b) Vérifier que L est inversible et montrer, pour tout entier relatif n : $L^n = I + nJ + \dfrac{n(n-1)}{2}K$.

   (c) Exprimer, pour tout entier relatif n, L^n à l'aide de I, L, L^2 et n.

   On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et e l'application identique de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même.

4. Montrer que f admet une valeur propre et une seule que l'on déterminera. Est-ce que f est diagonalisable ?

5. (a) Soit $w = (1; 0; 0)$.
   Calculer $v = (f - e)(w)$ et $u = (f - e)(v)$. Montrer que $(u; v; w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Déterminer la matrice associée à f relativement à la base $(u; v; w)$.

   (c) Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et, pour tout entier relatif n, exprimer f^n à l'aide de e, f, f^2 et n.

Exercice 2

On considère l'application $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie, pour tout réel t, par

$$f(t) = 0 \quad \text{si} \quad t < 0 \quad \text{et} \quad f(t) = \frac{1}{(1+t)^2} \quad \text{si} \quad t > 0.$$

1. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.
2. Montrer que f est une densité de probabilité.
3. Montrer que, pour tout réel x, l'intégrale $\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$ converge, et calculer cette intégrale.
   On distinguera les cas $x < 0$ et $x > 0$.
4. Déterminer un réel positif α tel que : $\int\limits_{-\infty}^{\alpha} f(t)dt = \frac{1}{2}$.
5. Soit $x \in [0; +\infty[$ fixé. On considère la fonction φ_x définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\forall u \in [0; +\infty[, \quad \varphi_x(u) = \int_{x-u}^{x+u} f(t)dt$$

   (a) Calculer $\varphi_x(0)$ et $\lim\limits_{u \to +\infty} \varphi_x(u)$.

   (b) Montrer que : $\forall (u; v) \in [0; +\infty[^2$, " $u < v$ " $\Rightarrow$ " $\varphi_x(v) - \varphi_x(u) \geqslant \int\limits_{x+u}^{x-u} f(t)dt$ " En déduire que φ_x est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

   (c) On admet que φ_x est continue sur $[0; +\infty[$. Montrer que l'équation $\varphi_x(u) = \frac{1}{2}$ d'inconnue u admet une solution et une seule dans $[0; +\infty[$.

   On note $U : [0; +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ l'application qui, à tout réel $x \in [0; +\infty[$, associe $U(x)$ l'unique solution de l'équation $\varphi_x(u) = \frac{1}{2}$.

   Ainsi, pour tout $x \in [0; +\infty[$, on a : $\int\limits_{x-U(x)}^{x+U(x)} f(t)dt = \frac{1}{2}$.

6. (a) Vérifier, pour tout $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right[$, $U(x) = 1 - x$.

   (b) Pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$, montrer que : $\varphi_x(x) \geqslant \frac{1}{2}$, puis : $x - U(x) \geqslant 0$, et en déduire : $U(x) = \sqrt{4 + (x+1)^2} - 2$.

7. (a) Montrer que l'application U est continue sur $[0; +\infty[$.

   (b) Étudier la dérivabilité de U sur $[0; +\infty[$.

   (c) Montrer que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe représentative de U.

   (d) Tracer l'allure de la courbe représentative de U.

8. On considère la suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = U(a_n)$

   (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \geqslant \frac{1}{2}$.

   (b) Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

   (c) En déduire que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et montrer que sa limite est égale à $\frac{1}{2}$.

   (d) Écrire un programme en Turbo-Pascal qui calcule et affiche le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que : $\left|a_n - \frac{1}{2}\right| \leqslant 10^{-6}$.

EXERCICE 3

1. Préliminaire :
   Soit $x \in]0;1[$. Dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes, de même probabilité d'échec x, on définit deux suites de variables aléatoires $(\ S_n\ )_{n \geqslant 1}$, et $(\ T_n\ )_{n \geqslant 1}$ de la façon suivante :

   - pour tout entier naturel n non nul, S_n est la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le $n^{ième}$succès ;
   - T_1 est la variable aléatoire égale à S_1 et pour tout entier naturel $n > 2$, T_n est la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves supplémentaires nécessaires pour obtenir le $n^{ième}$succès après le $(n-1)^{ième}$ succès.

   Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$, $T_n = S_n - S_{n-1}$ et pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$.

   (a) Pour tout entier naturel n non nul, déterminer la loi de T_n et, sans calcul, donner l'espérance et la variance de T_n.

   (b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, justifier l'indépendance des variables aléatoires $T_1, T_2, ..., T_n$.

   (c) Pour tout entier naturel n non nul, montrer que l'espérance et la variance de S_n sont définies et montrer : $E(S_n) = \dfrac{n}{1-x}$ et $V(S_n) = \dfrac{nx}{(1-x)^2}$.

   (d) Soit n un entier naturel non nul. Déterminer la loi de S_n.
   Que peut-on dire, sans calcul, de la valeur de $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} P(S_n = k)$?

   (e) En déduire, pour tout $x \in]0;1[$ et pour tout entier naturel n non nul :
   $$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^n}$$

2. Deux joueurs A et B procèdent chacun à une succession de lancers d'une même pièce. À chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est p, p fixé, $p \in]0;1[$, et la probabilité d'obtenir face est $q = 1 - p$.
   Le joueur A commence et il s'arrête quand il obtient le premier pile. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués par le joueur A.
   Le joueur B effectue alors autant de lancers que le joueur A et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenu par le joueur B.

   (a) Rappeler la loi de X et, pour tout $k \geqslant 1$, donner la loi conditionnelle de Y sachant $X = k$.

   (b) Quelles sont les valeurs prises par Y ?

   (c) Montrer : $P(Y = 0) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} pq^{2k-1} = \dfrac{q}{1+q}$.

   (d) Soit n un entier naturel non nul. Montrer :
   $$P(Y = n) = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} p^{n+1} q^{2k-n-1},$$
   puis, en utilisant 1.e ;
   $$P(Y = n) = \frac{1}{(1+q)^2} \left(\frac{q}{1+q}\right)^{n-1}.$$