Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 2005

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Premier problème.

On considère la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$T_0 = 1, \quad T_1 = 2X \quad \text{et, pour tout entier } n \geqslant 2, \quad T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2}.$$

On pourra confondre polynôme et fonction polynomiale. Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout réel x,

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x).$$

PARTIE I : Etude de la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1. Calculer T_2 et T_3.
2. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, T_n est un polynôme de degré n dont on déterminera le coefficient du terme de degré n.
   (b) Etablir que, si n est un entier pair (resp. impair), alors T_n est un polynôme pair (resp. impair).
3. Calculer, pour tout entier naturel n, $T_n(1)$ en fonction de n.
4. (a) Etablir, pour tout entier naturel n et tout réel θ de $]0,\pi[$: $T_n(\cos\theta) = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, T_n admet n racines réelles, toutes situées dans $]-1,1[$, que l'on explicitera.
   (c) Etablir, pour tout entier naturel non nul n : $T_n = 2^n \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(X - \cos\frac{k\pi}{n+1}\right)$.
   (d) En déduire, pour tout entier naturel non nul n, la valeur de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2(n+1)}$ en fonction de n.
5. (a) Démontrer, pour tout entier naturel n et tout réel θ de $]0,\pi[$:
   $$\sin^2\theta\, T_n''(\cos\theta) - 3\cos\theta\, T_n'(\cos\theta) + (n^2+2n)T_n(\cos\theta) = 0.$$
   Indication: On pourra dériver deux fois la fonction (nulle): $\theta \mapsto \sin\theta\, T_n(\cos\theta) - \sin(n+1)\theta$.
   (b) En déduire, pour tout entier naturel n : $(X^2-1)T_n'' + 3XT_n' - (n^2+2n)T_n = 0$.

   Dans la suite du problème, n désigne un entier naturel fixé tel que $n \geqslant 2$, et on note E l'espace vectoriel réel des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n.
   On note L l'application qui, à un polynôme P de E, associe le polynôme $L(P)$ défini par :
   $$L(P) = (X^2-1)P'' + 3XP'.$$

PARTIE II: Etude de l'endomorphisme L

1. Montrer que L est un endomorphisme de l'espace vectoriel E.

2. (a) Calculer $L(T_k)$ pour tout k de $\{0, 1, ..., n\}$.

   (b) En déduire les valeurs propres de L et, pour chaque valeur propre de L, une base et la dimension du sous-espace propre associé.

PARTIE III: Etude d'un produit scalaire

Dans la suite du problème, on note ω l'application qui, à tout couple (P, Q) de polynômes de E, associe le réel

$$\omega(P, Q) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} P(x) Q(x) dx.$$

1. Montrer que ω est un produit scalaire sur E.

2. Démontrer, pour tous polynômes P, Q de E : $\omega(L(P), Q) = \omega(P, L(Q))$.

   Indication: On pourra, à l'aide d'une intégration par parties, montrer : $\omega(L(P), Q) = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{3/2} P'(x) Q'(x) dx$.

3. Etablir que $(T_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base orthogonale de E.

DEUXIEME PROBLEME

PARTIE I: Calcul de la somme d'une série convergente

1. Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\times}$: $\int_0^{\pi} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$.

2. Etablir, pour tout $m \in \mathbb{N}^{\times}$ et tout t de $]0, \pi]$:

$$\frac{1 - e^{imt}}{1 - e^{it}} e^{it} = \frac{\sin \frac{tm}{2}}{\sin \frac{t}{2}} e^{\frac{i(m+1)t}{2}}, \quad \text{puis} \quad \sum_{n=1}^{m} \cos(nt) = \frac{\cos \frac{(m+1)t}{2} \sin \frac{mt}{2}}{\sin \frac{t}{2}}.$$

3. Soit $u : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1.

   Montrer, à l'aide d'une intégration par parties: $\int_0^{\pi} u(t) \sin(\lambda t) \, dt \underset{\lambda \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

4. Soit l'application $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2 \sin \frac{t}{2}}$ si $t \in]0, \pi]$ et $f(0) = -1$.

   Montrer que f est de classe C^1 sur $[0, \pi]$

5. (a) Montrer : $m \in \mathbb{N}^{\times}$, $\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} f(t) \sin \frac{(2m+1)t}{2} dt$.

   (b) Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ et montrer: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

PARTIE II: Etude d'une fonction définie par la somme d'une série convergente.

1. (a) Montrer que, pour tout couple $(x, y) \in ([0, +\infty[)^2$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{(n+x)(n+y)}$ et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{(n+x)^2(n+y)}$ convergent.

   (b) Montrer que, pour tout x de $[0, +\infty[$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}\right)$ converge.

   On note S l'application définie, pour tout x de $[0, +\infty[$, par $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x}\right)$.

2. Calculer $S(0)$ et $S(1)$.

3. (a) Etablir : $\forall (x, y) \in ([0, +\infty[)^2, \quad S(y) - S(x) = (y - x) \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+x)(n+y)}$.

   (b) En déduire: $\forall (x, y) \in ([0, +\infty[)^2, \quad |S(y) - S(x)| = \dfrac{\pi^2}{6} |y - x|$.

   (c) Montrer alors que la fonction S est continue sur $[0, +\infty[$.

4. (a) Montrer, pour tout couple (x, y) de $([0, +\infty[)^2$ tel que $x \neq y$:

$$\left| \frac{S(y) - S(x)}{y - x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right| \leqslant |y - x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

   (b) En déduire que la fonction S est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que: $\forall x \in [0, +\infty[, \quad S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+x)^2}$.

   (c) Préciser les valeurs de $S'(0)$ et $S'(1)$.

5. On admet que S est deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$ et que: $\forall x \in [0, +\infty[, \quad S''(x) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2}{(n+x)^3}$.
   Montrer que S est concave.

6. Soit $x \in]0, +\infty[$ fixé. On note ω la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad \omega(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}.$$

   (a) Montrer que l'intégrale $\int\limits_1^{+\infty} \varphi(t)dt$ converge et calculer sa valeur.

   (b) Montrer: $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad \omega(n+1) \leqslant \int\limits_n^{n+1} \varphi(t)dt \leqslant \omega(n)$, et en déduire: $\int\limits_1^{+\infty} \varphi(t)dt \leqslant S(x) \leqslant 1 + \int\limits_1^{+\infty} \varphi(t)dt$.

   (c) Conclure que $S(x)$ équivaut à $\ln x$ en $+\infty$.

7. (a) Dresser le tableau de variation de S, en précisant la limite de S en $+\infty$.

   (b) Tracer l'allure de la courbe représentative de S.