

Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 2006

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Problème I

Préliminaires

1. (a) Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $t^n e^{-t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ est convergente.

2. En déduire que, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)e^{-t^2} dt$ converge.

On admet dans tout le problème : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

On note, dans tout le problème, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$.

3. (a) tablir, à l'aide d'une intégration par parties, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n$.

(b) Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $I_{2p+1} = 0$.

(c) Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi}$.

I. Recherche d'extrémums locaux pour une fonction de deux variables réelles

On note $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par :

$$F(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2 (t-y)^2 e^{-t^2} dt$$

1. Montrer, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $F(x, y) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}(x^2 + 4xy + y^2) + x^2 y^2$.

2. Calculer les dérivées partielles premières de F en tout point (x, y) de \mathbb{R}^2 , et en déduire les trois points critiques de F .

3. Déterminer les extrémums locaux de F . En chacun de ceux-ci, préciser s'il s'agit d'un minimum local ou d'un maximum local, et préciser la valeur de F en chacun de ces points.

II. Calcul d'intégrales dépendant d'un paramètre

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les intégrales $\int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2} dt$ et $\int_0^{+\infty} t \cos(xt)e^{-t^2} dt$ convergent.

On note $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ les applications définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$S(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad C(x) = \int_0^{+\infty} t \cos(xt)e^{-t^2} dt$$

2. Etablir, pour tout $a \in \mathbb{R}$, et tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $|\sin(a + \lambda) - \sin a - \lambda \cos a| \leq \frac{\lambda^2}{2}$.

On pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.

3. (a) Démontrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.

(b) En déduire que S est dérivable sur \mathbb{R} , et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S'(x) = C(x)$.

4. (a) A l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}S(x)$.

(b) Montrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $2e^{-\frac{x^2}{4}} S(x) = \int_0^x e^{-\frac{t^2}{4}} dt$.

(c) En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$S(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{4}} dt \quad \text{et} \quad C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{4}} dt$$

III. Obtention d'un développement limité

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2t^2} e^{-t^2} dt$ converge.

On note $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par : $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2t^2} e^{-t^2} dt$.

2. (a) Montrer, pour tout $u \in [0; +\infty[$: $0 \leq (1 - u + u^2) - \frac{1}{1+u} \leq u^3$.

(b) En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - x^2t^2 + x^4t^4)e^{-t^2} dt - g(x) \leq \frac{15\sqrt{\pi}}{8} x^6$.

3. Montrer que g admet un développement limité à l'ordre 5 en 0, et former ce développement limité.

IV. Nature d'une série

1. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} dt$ converge.

On note, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $u_p = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} dt$.

2. Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_p \leq \frac{I_{2p}}{(2p)!}$.

En déduire que la série de terme général u_p est convergente.

Problème II

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par I_n , la matrice unité de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

On considère un n -uplet $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ de \mathbb{C}^n et le polynôme :

$$P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$$

On note C la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & (0) & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$

On dit que C est la matrice compagnon du polynôme P .

On note $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de \mathbb{C}^n .

On note Id l'application identité de \mathbb{C}^n et on appelle f l'endomorphisme de \mathbb{C}^n tel que C soit la matrice associée à f relativement à la base \mathcal{B}_0 .

On note $f^0 = \text{Id}$ et, pour tout entier naturel k , $f^{k+1} = f^k \circ f$.

1. (a) Exprimer, pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $f(e_i)$ en fonction de e_{i+1} .
 (b) En déduire : $\forall j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $f^j(e_1) = e_{j+1}$ et $f^n(e_1) = -(a_0e_1 + a_1e_2 + \dots + a_{n-1}e_n)$.
2. Soit g l'endomorphisme de \mathbb{C}^n défini par $g = f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \dots + a_1f + a_0 \text{Id}$.
 (a) Vérifier : $g(e_1) = 0$.
 (b) Montrer : $\forall i \in \mathbb{N}$, $g \circ f^i = f^i \circ g$.
 (c) En déduire : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $g(e_i) = 0$.
 (d) Montrer que le polynôme P est annulateur de l'endomorphisme f .
Application 1: Déterminer une matrice $A \in \mathfrak{M}_5(\mathbb{C})$ telle que $A^5 = A^3 + 2A^2 + I_5$.
 (e) tablir que toutes les valeurs propres de C sont des racines du polynôme P .
3. (a) Soit $Q = \alpha_0 + \alpha_1X + \dots + \alpha_{n-1}X^{n-1}$ un polynôme non nul et de degré inférieur ou égal à $n-1$.
 On note $Q(f)$ l'endomorphisme de \mathbb{C}^n défini par $Q(f) = \alpha_0 \text{Id} + \alpha_1f + \dots + \alpha_{n-1}f^{n-1}$.
 Calculer $Q(f)(e_1)$.
 (b) En déduire qu'il n'existe pas de polynôme non nul, de degré inférieur ou égal à $n-1$ et annulateur de f .
 (c) Soit λ une racine du polynôme P .
 Il existe donc un unique polynôme $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = (X - \lambda)R$.
 Vérifier que $(f - \lambda \text{Id}) \circ R(f) = \tilde{0}$, où $\tilde{0}$ est l'endomorphisme nul de \mathbb{C}^n .
 (d) Conclure que toutes les racines du polynôme P sont des valeurs propres de C .
4. (a) Montrer que, pour tout nombre complexe x , la matrice $(C - xI_n)$ est de rang supérieur ou égal à $n-1$.
 En déduire que chaque sous-espace propre de C est de dimension 1.
 (b) En déduire que C est diagonalisable si et seulement si P admet n racines deux à deux distinctes.

5. (a) Montrer que la matrice $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathfrak{M}_4(\mathbb{C})$ est diagonalisable.

(b) Montrer que la matrice $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ de $\mathfrak{M}_4(\mathbb{C})$ n'est pas diagonalisable.

6. On note $B = {}^tC$ la matrice transposée de C .

- (a) Montrer que, pour tout nombre complexe t , la matrice $(B - tI_n)$ est inversible si et seulement si la matrice $(C - tI_n)$ est inversible.
- (b) En déduire que les matrices B et C ont les mêmes valeurs propres.
- (c) Soit λ une valeur propre de B . Déterminer une base du sous-espace propre de B associé à λ .
- (d) On suppose que le polynôme P admet n racines $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ deux à deux distinctes. Montrer que B est

diagonalisable et en déduire que la matrice $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est inversible.

7. Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E admettant n valeurs propres μ_1, \dots, μ_n deux à deux distinctes.

L'endomorphisme u est donc diagonalisable et on note $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E constituée de vecteurs propres de u respectivement associés à μ_1, \dots, μ_n .

- (a) Soit $a = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n$. Montrer que la famille $\mathcal{B}_a = (a, u(a), \dots, u^{n-1}(a))$ est une base de E .
- (b) Montrer qu'il existe un polynôme $P_1 = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \dots + b_1X + b_0$ tel que la matrice associée à u relativement à la base $\mathcal{B}_a = (a, u(a), \dots, u^{n-1}(a))$ soit la matrice compagnon du polynôme P_1 .