ENSAE

CONCOURS D'ENTREE 1993

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option économique)

La clarté et la rigueur des raisonnements, ainsi que la qualité de la rédaction (présentation, lisibilité, orthographe) seront des éléments importants d'appréciation des copies. Il est notamment demandé aux candidats d'encadrer les résultats obtenus et de faire apparaître clairement les théorèmes utilisés et les points clés de leurs réponses. En particulier pour les questions dont l'énoncé fournit la réponse, le détail des calculs ou des justifications doit figurer explicitement sur la copie.

PROBLEME I

Dans tout le problème, x désigne un réel strictement positif, et n un entier naturel.

Partie I

1. (a) Calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$.

   (b) On pose :
   $$F_n(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{n+1}}dt \tag{1}$$
   Montrer que $F_n(x)$ converge pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, et vérifie :
   $$0 < F_n(x) < \frac{e^{-x}}{x^{n+1}}.$$

   (c) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $F_n(x)$ est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$, et calculer sa dérivée F_n'.

2. On pose $f_0(x) = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$, $\quad f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{x^k}$ (avec la convention $0! = 1$).

   (a) Etablir pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, la relation de récurrence :
   $$F_n(x) = \frac{e^{-x}}{x^{n+1}} - (n+1)F_{n+1}(x) \tag{2}$$

   (b) En déduire :
   $$e^x F_0(x) = f_n(x) + (-1)^n n! e^x F_n(x) \tag{3}$$

3. (a) On pose $\varphi(x) = e^x F_0(x)$. Montrer que :
   $$|\varphi(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

(b) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $\epsilon_n = \dfrac{n!}{10^{n+1}}$ est minimal et en déduire, pour ces valeurs de n, un majorant numérique de l'erreur commise en prenant $f_n(10)$ somme valeur approchée de $\varphi(10)$.

Partie II

1. (a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$, la convergence de l'intégrale :

$$G_n(x) = n! \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}(t-x)^n}{t^{n+1}} dt.$$

Exprimer la fonction G_n comme combinaison linéaire des fonctions $x \to x^p F_p(x)$

(b) Etablir que la fonction G_n est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$.

(c) Justifier que pour $n \geqslant 1$, on a $\sum\limits_{p=0}^{n} (-1)^n C_n^p = 0$

(d) Pour $n \geqslant 1$ et $x > 0$, montrer que :

$$G_n'(x) = -n \times (n!) \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}(t-x)^{n-1}}{t^{n+1}} dt \tag{4}$$

2. (a) Pour $n \geqslant 1$ et $x > 0$, montrer que :

$$xG_n'(x) = nG_n(x) - n^2 G_{n-1}(x) \tag{5}$$

(b) A l'aide d'une intégration par parties, que l'on justifiera, de $\int\limits_x^{+\infty} \frac{e^{-t}(t-x)^{n-1}}{t^n} dt$, montrer que pour $n \geqslant 1$ et $x > 0$, on a :

$$G_n'(x) = nG_{n-1}(x) + nG_{n-1}'(x) \tag{6}$$

(c) En utilisant (5) et (6), établir que pour $n \geqslant 1$ et $x > 0$, :

$$G_{n+1}(x) = (x + 2n + 1)G_n(x) - n^2 G_{n-1}(x) \tag{7}$$

(d) En utilisant encore les relations (5) et (6), montrer que pour $n \geqslant 1$ et $x > 0$, on a :

$$xG_n''(x) + (x+1)G_n'(x) - nG_n(x) = 0 \tag{8}$$

Partie III

1. (a) Etant donné l'entier $n \geqslant 1$, on cherche à déterminer les réels $\alpha_{n,0}, \alpha_{n,1} \ldots \alpha_{n,n-1}$, pour que le polynôme P_n :

$$P_n(x) = x^n + \alpha_{n,n-1}x^{n-1} + \ldots + \alpha_{n,1}x + \alpha_{n,0}$$

vérifie l'équation (dite *équation différentielle*), pour tout $x > 0$:

$$xP_n''(x) + (x+1)P_n'(x) - nP_n(x) = 0 \tag{9}$$

Montrer que les $\alpha_{n,p}$ doivent vérifierla relation de récurrence : $(p+1)^2\alpha_{n,p+1} = (n-p)\alpha_{n,p}$, pour $p \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, où l'on a posé $\alpha_{n,n} = 1$.

(b) En déduire que $\alpha_{n,p} = \dfrac{n!}{p!} C_n^p$, puis que $\alpha_{n,p}$ est un entier.

(c) Expliciter les polynômes P_1, P_2, P_3.

(a) En utilisant (3) et la question (**II.**1b), montrer que pour $n \in \mathbb{N}^\times$, il existe un unique polynôme Q_n tel que pour tout $x > 0$, on ait :

$$G_n(x) = P_n(x)F_0(x) - Q_n(x)e^{-x} \tag{10}$$

et vérifier que $Q_n(x) = \sum_{p=0}^{n} \alpha_{n,p} x^p f_p(x)$.

(b) Expliciter les polynômes Q_1, Q_2, Q_3.

2. (a) Etablir pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$ les inégalités :

$$0 < G_n(x) < \frac{n!e^{-x}}{x} \quad \text{et} \quad P_n(x) > n!nx.$$

(b) Montrer que pour $x > 0$ fixé, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{G_n(x)}{P_n(x)} e^x \right) = 0$.

(c) En déduire, pour x fixé, $\varphi(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{Q_n(x)}{P_n(x)}$. Calculer $\dfrac{Q_3(10)}{P_3(10)}$ et en déduire une valeur approchée de $\varphi(10)$.

PROBLEME II

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel, et $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

On note I la matrice identité de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ et M la matrice : $M = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

1. (a) Calculer $A = \dfrac{1}{4}(M - I)$, puis A^2.

(b) Démontrer qu'il existe une suite (u_n) de nombres réels telle que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad M^n = I + u_n A.$$

(c) Calculer u_n en fonction de n et en déduire l'expression de M^n.

2. Soit J la matrice définie par : $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer J^2, puis J^n, et montrer que J n'est pas inversible.

3. On considère l'ensemble $E = \{aI + bJ \text{ tel qeu } (a,b) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$

(a) Montrer que E est stable pour le produit matriciel. Montrer que E est un espace vectoriel réel;en donner une base et préciser sa dimension.

(b) Déterminer quels sont les éléments de E admettant un inverse dans E et préciser celui-ci.

(c) Résoudre dans E les équations d'inconnue X :

$$(i) : X^2 = I \qquad (ii) : X^2 = X.$$

4. (a) Montrer que $M \in E$

   (b) En déduire que $M^n = [1 - (-3^n]\, J + (-3)^n I$ et comparer avec le résultat obtenu en 1c.

5. Soit j l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à J dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Pour quelles valeurs de λ le noyau de l'endomorphisme $j - \lambda Id$ n'est-il pas réduit au vecteur nul ?

   (b) En déduire une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de j soit égale à :

$$J' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Déterminer la matrice de passage P de la base canonique à $\mathcal{B}$.

   (c) Donner, dans la base $\mathcal{B}$, la matrice N de l'endomorphisme f de matrice M dans la base canonique.

   (d) Déterminer la matrice de $f^n = f \circ f \ldots \circ f$ dans cette base.

   (e) Retrouver à nouveau l'expression de M^n.