ENSAE

CONCOURS D'ENTREE 1995

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option économique)

La clarté et la rigueur des raisonnements, ainsi que la qualité de la rédaction (présentation, lisibilité, orthographe) seront des éléments importants d'appréciation des copies.
Il est notamment demandé aux candidats d'encadrer les résultats obtenus et de faire apparaître clairement les théorèmes utilisés et les points clés de leurs réponses. En particulier pour les questions dont l'énoncé fournit la réponse, le détail des calculs ou des justifications doit figurer explicitement sur la copie.

PROBLEME I

On note $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
Pour un vecteur $x \neq 0$ de $\mathbb{R}^n$, on notera $\mathrm{Vect}(x)$ le sous-espace vectoriel engendré par x.
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice à coefficients réels. On appelle *trace* de A le scalaire

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

1. (a) Montrer que si A et B sont deux éléments de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
   (b) Montrer que deux matrices semblables ont la même trace.
   u étant un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, ceci permet de définir la trace de u, que l'on note $\mathrm{tr}\, u$, comme la trace de la matrice associée à u dans n'importe quelle base de $\mathbb{R}^n$.

2. Montrer que si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, x et $u(x)$ sont liés alors u est une homothétie (on pourra introduire une base de $\mathbb{R}^n$)
   Dans toute la suite du problème, u désignera un endomorphisme non nul de trace nulle.

3. Justifier l'existence d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ tel que x et $u(x)$ soient indépendants, ainsi que celle d'un supplémentaire F de $\mathrm{Vect}(x)$ contenant le vecteur $u(x)$.
   On désigne par p la projection sur F parallèlement à $\mathrm{Vect}(x)$

4. Montrer que la restriction à F de $p \circ u$ est un endomorphisme de F de trace nulle.

5. Montrons qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de u a tous ses coefficients diagonaux nuls (on pourra procéder par récurrence sur n).

6. Soit D une matrice diagonale de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & (0) \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

   telle que $i \neq j \Rightarrow \alpha_i \neq \alpha_j$.
   Montrer que l'application $\varphi : M \mapsto DM - MD$ est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et en déterminer le noyau.
   Calculer $\dim \ker \varphi$

7. (a) Soit $\mathcal{G}$ un supplémentaire de $\ker \varphi$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la restriction de φ à $\mathcal{G}$ est une bijection de $\mathcal{G}$ sur $\operatorname{Im} \varphi$.
   (b) Que vaut $\dim \operatorname{Im} \varphi$?
   (c) En déduire que $\operatorname{Im} \varphi$ est l'ensemble des matrices dont les coefficients diagonaux sont nuls.

8. Montrer que si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice de trace nulle, alors il existe deux matrices B et C de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = BC - CB$.

PROBLEME II

Toutes les suites et fonctions intervenant dans ce problème sont à valeurs réelles.
A toute fonction f, continue sur $[0, 1]$, on associe la suite $(a_k(f))_{k \in \mathbb{N}}$ définie par

$$a_k(f) = \int_0^1 x^k f(x) dx$$

1. Montrer que pour toute fonction f la suite $a_k(f)$ tend vers 0.

2. Soit α et β deux réels vérifiant $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$. Démontrer qu'il existe un polynôme P du second degré satisfaisant aux conditions suivantes :

   (i) $\forall x \in]\alpha, \beta[, \quad P(x) > 1$
   (ii) $\forall x \in]0, \alpha] \cup [\beta, 1], \quad 0 \leqslant P(x) \leqslant 1$

   Un tel P étant choisi, calculer

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\alpha^\beta P^n(x) dx$$

3. (a) Soit f une application continue sur $[0, 1]$. On suppose qu'il existe trois constantes ε, α, β, avec $\varepsilon > 0$ et $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$, telles que l'on ait

$$\forall x \in [\alpha, \beta], \quad f(x) \geqslant \varepsilon$$

   Soit alors P un polynôme satisfaisant aux conditions imposées dans la question précédente. Calculer

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f(x) P^n(x) dx$$

   (b) En déduire que si f est une application continue sur $[0, 1]$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k(f) = 0$ alors $f = 0$. (On pourra raisonner par l'absurde).

4. Soit f une application continue sur $[0, 1]$.

   (a) Calculer $a_k(F)$ où $F(x) = -\int_x^1 f(t) dt$.
   (b) On suppose qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant p$ on ait $a_k(f) = 0$. Montrer que $f = 0$.