ENSAE

CONCOURS D'ENTREE 1999

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option économique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Problème 1

Notation : Pour deux entiers naturels p et $q \geqslant p$, on note $[\![p,q]\!] = [p,q] \cap \mathbb{N}$, c'est-à-dire l'ensemble des entiers naturels compris, au sens large, entre p et q.

1. (a) Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^{\times}$, établir la formule

$$\sum_{j=0}^{k} C_k^j = 2^k \tag{1}$$

En déduire la valeur, pour $N \in \mathbb{N}^{\times}$, de $\sum\limits_{j=N+1}^{2N+1} C_{2N+1}^j$.

(b) Pour tous $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, et $r \in \mathbb{N}$, montrer que :

$$\sum_{j=0}^{r} C_{n-1+j}^{n-1} = C_{n+r}^{n} \tag{2}$$

2. (a) Soient n et p deux entiers vérifiant : $1 \leqslant p \leqslant n$. Rappeler la valeur du cardinal de l'ensemble E des suites strictement croissantes à p éléments dans l'ensemble $I = [\![1,n]\!]$:

$$E = \{(q_1, q_2, \ldots, q_p) \ / \ 1 \leqslant q_1 < q_2 < \cdots < q_p \leqslant n\}$$

Soit $r \in [\![0, p-1]\!]$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$. Déterminer le cardinal du sous-ensemble E_k de E constitué des suites strictement croissantes $(q_1, q_2, \ldots, q_p)$ pour lesquelles $q_{r+1} = k+1$.
En déduire la formule

$$C_n^p = \sum_{k=r}^{n-p+r} C_k^r C_{n-k-1}^{p-r-1} \tag{3}$$

(b) Déduire de ce qui précède la formule sommatoire suivante, pour tout $N \in \mathbb{N}^{\times}$:

$$S_N = \sum_{k=0}^{N} C_{2N-k}^{N} 2^k = 2^{2N} \tag{4}$$

(c) Retrouver la relation (4) ci-dessus à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

3. Un amateur de bonbons, de peur de se retrouver démuni, se promène toujours avec deux boîtes de cachous, une dans chaque poche de sa veste. Initialement chaque boîte, neuve, contient le même nombre N ($N \in \mathbb{N}^\times$) de cachous. Chaque fois qu'il a envie d'un bonbon, l'individu choisit une boîte au hasard (les choix étant indépendants) et en tire un bonbon.
On note X_N la variable aléatoire du nombre de bonbons restant dans l'*autre* boîte lorsqu'il se rend compte que l'une des boîtes est vide (on prendra garde que ceci ne se produit pas lorsqu'il tire le dernier bonbon, mais à la tentative suivante).

(a) Déterminer la loi de la variable aléatoire X_N.
Vérifier qu'on a bien une loi de probabilité.

(b) Établir la relation, pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$:

$$2(N-k)P(X_N = k) = (2N+1)P(X_N = k+1) - (k+1)P(X_N = k+1) \qquad (5)$$

En déduire que

$$E(X_N) = (2N+1)P(X_N = 0) - 1 \qquad (6)$$

En admettant que

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2n\pi}(\frac{n}{e})^n \qquad (7)$$

montrer que : $E(X_N) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{\dfrac{N}{\pi}}$.

(c) On appelle Y_N la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de bonbons restant dans l'autre boîte lorsqu'une première boîte est vidée (et non lorsqu'on découvre qu'elle est vide).
Déterminer la loi de Y_N.

(d) En déduire la probabilité p_N que la première boîte à être vidée ne soit pas la première à être trouvée vide.
Montrer que :

$$p_N = \frac{C_{2N-1}^N}{2^{2N}} \qquad (8)$$

puis, à l'aide de l'équivalent (7), que $p_N \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\sqrt{N\pi}}$.

Problème 2

Partie 1

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_5[X]$ des polynômes degré inférieur ou égal à 5. On note E_1 l'ensemble des polynômes impairs de E et E_2 l'ensemble des polynômes pairs de E. On désigne par e_k, $(0 \leqslant k \leqslant 5)$ les éléments de la base canonique de E de sorte que $e_k(X) = X^k$. On nommera pareillement "base canonique" de E_l (resp. de E_2) la base (e_1, e_3, e_5) (resp. (e_0, e_2, e_4)) de E_1 (resp. E_2).

1. Justifier que E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, c'est-à-dire $E = E_1 \oplus E_2$.

2. (a) Montrer que l'application σ qui à tout polynôme $P \in E_2$ associe le polynôme $\sigma(P)$ défini par

$$\sigma(P)(X) = (X^2+1)P''(X) - XP'(X) \qquad (1)$$

définit un endomorphisme de E_2.

(b) Donner la matrice de σ dans la base canonique (e_0, e_2, e_4) de E_2.

(c) Déterminer le noyau de σ, ainsi que ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

(d) σ est-il diagonalisable ?

3. (a) Montrer que l'application s qui à tout polynôme $P \in E_2$ associe le polynôme $s(P)$ défini par

$$s(P)(X) = (X^2 - 1)P''(x) + XP'(X) \tag{2}$$

définit un endomorphisme de E_2.

(b) Donner la matrice de s dans la base canonique (e_0, e_2, e_4) de E_2.

(c) Déterminer le noyau de s, ainsi que ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

(d) s est-il diagonalisable ?

4. On considère l'application qui à tout polynôme $P \in E$ associe le polynôme $2XP(X) - P'(X)$.

(a) Montrer que la restriction f de cette application au sous-espace E_2 définit une application linéaire de E_2 dans E_1.

(b) Déterminer la matrice de cette application dans les bases canoniques respectives de E_2 et E_1.

(c) Montrer que f est un isomorphisme.

Partie 2

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ non nécessairement de dimension finie. On désigne par E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires, de sorte que $E = E_1 \oplus E_2$. On désigne par s un endomorphisme de E_2 et par f une application linéaire bijective de E_2 dans E_1. A $x \in E$ s'écrivant $x = x_1 + x_2$, où $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, on associe

$$F(x) = f^{-1}(x_1) + f(x_2) + s(x_2) \tag{3}$$

1. (a) Prouver que F est injective.

(b) Prouver que F est surjective (on ne suppose PAS que E est de dimension finie) et exprimer $F^{-1}(y)$, où $y = y_1 + y_2 \in E$ et $(y_1, y_2) \in E_1 \times E_2$

2. (a) On suppose que F admet une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $x \neq 0$ un vecteur propre associé, décomposé en $x = x_1 + x_2$ où $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$. Prouver que x_1 et x_2 sont non nuls et que x_2 est vecteur propre de s.

(b) Réciproquement, on suppose que s admet une valeur propre réelle μ. Prouver que F admet au moins une valeur propre réelle λ. Déterminer un vecteur propre de F associé à λ en fonction d'un vecteur propre x_2 de s associé à μ.

(c) Montrer que si $u_1, \dots, u_k$ sont des vecteurs propres de s indépendants et associés à une même valeur propre μ de s, alors les vecteurs propres de F précédemment calculés sont indépendants.
On suppose désormais E de dimension finie, et on pose $n = \dim E_1$

3. (a) Justifier que $\dim E_1 = \dim E_2 = n$ et $\dim E = 2n$.

(b) Soient $\mu_1, \dots, \mu_p$ les valeurs propres réelles distinctes de s. Prouver que F admet $2p$ valeurs propres réelles distinctes.

(c) Montrer que si s est diagonalisable, F l'est aussi.

Partie 3

1. On considère dans cette question $E = \mathbb{R}_5[X]$ et les applications s et f définies dans la partie 1. Déterminer les valeurs propres de l'application F correspondante (définie dans la partie 2).

2. On désire appliquer les résultats précédents au cas de la matrice définie par blocs :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I_3 \\ I_3 & B \end{pmatrix} \qquad \text{où} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

   et où I_3 désigne la matrice unité d'ordre 3.

   (a) Donner les matrices des applications s et f permettant d'appliquer les résultats obtenus à la partie 2.

   (b) La matrice A est-elle diagonalisable ?