ENSAE

CONCOURS D'ENTREE 2001

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option économique)

La clarté et la rigueur des raisonnements, ainsi que la qualité de la rédaction (présentation, lisibilité, orthographe) seront des éléments importants d'appréciation des copies.
Il est notamment demandé aux candidats d'encadrer les résultats obtenus et de faire apparaître clairement les théorèmes utilisés et les points clés de leurs réponses. En particulier pour les questions dont l'énoncé fournit la réponse, le détail des calculs ou des justifications doit figurer explicitement sur la copie.

Probleme 1

On considère les fonctions définies par

$$f(t) = \frac{t}{\sqrt[3]{t^3-1}} \text{ et } F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} f(t)dt = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{tdt}{\sqrt[3]{t^3-1}}$$

où la fonction $t \mapsto \sqrt[3]{t}$ est définie sur $\mathbb{R}$ (par exemple $\sqrt[3]{-8} = -2$).
L'objet du problème est l'étude de la fonction F. On note C sa courbe représentative.

1. **Domaine de définition :**

   (a) Étudier la convergence des intégrales suivantes (qu'on ne cherchera pas à calculer) :

   $$I = \int_0^1 f(t)dt, \qquad J = \int_2^{+\infty} f(t)dt, \qquad J' = \int_{-\infty}^0 f(t)dt$$

   (b) Justifier que F est définie sur $]-\infty, 0[$.

   (c) Montrer qu'on peut prolonger la définition de F à $]0, +\infty[$ en posant

   $$\begin{cases} F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{1} f(t)dt + \int_1^x f(t)dt & \forall x > 0 \text{ et } x \neq 1 \\ F(1) = 0 \end{cases}$$

2. **Étude aux bornes :**

   (a) Déterminer les limites de la fonction F aux bornes de son domaine de définition $D = \mathbb{R}^{\times}$.

(b) Montrer que, pour tout $x < 0$, on a:

$$F(x) - x = \int_{\frac{1}{x}}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} g(t)dt, \text{ où } g(t) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{t^3}\right)^{\frac{1}{3}}} - 1$$

(c) Étudier la convergence de l'intégrale $K = \int\limits_{-\infty}^{0} g(t)dt$

En déduire l'allure de la courbe C de F pour $x \to -\infty$.

(d) Faire une étude analogue en $+\infty$.

3. **Variations :**

(a) Justifier que la fonction F est dérivable sur $D' =]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$. Calculer sa dérivée et étudier son signe.

(b) Montrer que F est de classe C^1 en 1 et vérifier qu'en ce point F' s'annule sans changer de signe (on dit que C présente un point d'inflexion en 1).

(c) Calculer la dérivée seconde de F et étudier son signe.

(d) Rassembler ces résultats dans un tableau de variations de la fonction F.

4. **Courbe :** Dessiner l'allure de la courbe C.

Probleme 2

Définitions et notations :

- Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et $GL(E)$ l'ensemble des endomorphismes bijectifs de E.

- Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, une partie A de E est dite stable par f si $f(A) \subset A$.

- Un polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$ est dit unitaire si son coefficient dominant (c'est-à-dire le coefficient du terme de plus haut degré) vaut 1.

- Étant donné un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, s'écrivant $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k$, on pose

$$P(f) = \sum_{k=0}^{d} a_k f^k \text{ où } f^k = f \circ f^{k-1} \text{ si } k \geqslant 1 \text{ et } f^0 = Id.$$

  Par exemple, si $\lambda \in \mathbb{C}$ et $P(X) = X - \lambda$, alors $P(f) = f - \lambda Id$. On admettra que, si $P(X) = Q(X)R(X)$, alors $P(f) = Q(f) \circ R(f) = R(f) \circ Q(f)$.

- On rappelle enfin que tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ peut s'écrire sous la forme d'un produit d'une constante et de polynômes du type $X - \alpha_i$, avec $\alpha_i \in \mathbb{C}$.

- Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit cyclique s'il existe un entier naturel non nul p et un vecteur $a \in E$ tels que :

$$C_a^p = a, f(a), f^2(a), \dots, f^{p-1}(a)$$

  soit une partie génératrice de E de cardinal p, stable par f, autrement dit, vérifie les trois propriétés suivantes :

(i) $\mathcal{C}_a^p$ possède p éléments deux à deux distincts;

(ii) $f(\mathcal{C}_a^p) \subset \mathcal{C}_a^p$, c'est-à-dire : pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, $f^j(a)$ est un élément de $\mathcal{C}_a^p$;

(iii) $Vect(\mathcal{C}_a^p) = E$, c'est-à-dire : le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{C}_a^p$ est égal à E.

Une telle partie $\mathcal{C}_a^p$ est appelée *cycle* de f et on dit alors que f est *cyclique d'ordre* p.

L'objet du problème est l'étude de quelques exemples et propriétés des endomorphismes cycliques.

Question préliminaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Prouver que λ est une valeur propre de f si et seulement si $f - \lambda Id$ n'est pas bijectif.

Partie I

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, cyclique d'ordre p; on rappelle que $n = \dim E$.

   (a) Justifier que $p \geqslant n$.

   (b) Montrer que f est de rang au moins $n-1$.

2. Soit $h \in \mathcal{L}(E)$ tel que $h^2 = h$. Montrer que $\mathrm{Im}(h) = \ker(h - Id)$.
   Pour quelles valeurs de $n = \dim E$ l'endomorphisme h peut-il être cyclique?
   Comment faut-il choisir a pour que $\mathcal{C}_a^p$ soit un cycle de h?

3. Dans $\mathbb{C}^2$, soit f un endomorphisme cyclique d'ordre 2; prouver que 1 est valeur propre de f. (On pourra utiliser la question préliminaire.)

4. On considère $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

   (a) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Montrer que f est cyclique et expliciter un cycle de f. Déterminer le rang de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable? (On pourra étudier le système $AY = \lambda Y$ où Y est un vecteur colonne et $\lambda \in \mathbb{C}$.)

   (b) Mêmes questions avec l'endomorphisme g de $\mathbb{C}^n$, de matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Partie II

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme cyclique et $\mathcal{C}_a^p$ un cycle de f.

1. Soit m le plus grand entier tel que la famille $\mathcal{F} = (a, f(a), f^2(a), \ldots, f^{m-1}(a))$ soit libre.
   (a) Prouver que, pour tout $k \geqslant m$, $f_k(a) \in Vect(\mathcal{F})$.
   (b) En déduire que la famille $\mathcal{B} = (a, f(a), \ldots, f^{n-1}(a))$ est une base de E.
2. Prouver que si $[P(f)](a) = 0$ alors $P(f) = 0$.

   Dans toute la suite du problème, on suppose que $f \in GL(E)$.
3. (a) Montrer que, si $\mathcal{C}_a^p$ est un cycle de f, on a $f^p(a) = a$.
   (b) Prouver que $f^p = Id$.
4. (a) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -\alpha_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

   (b) En déduire l'existence d'un unique polynôme unitaire T de degré n, tel que $T(f) = 0$.
   (c) Prouver qu'il n'existe pas de polynôme non nul $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg P < n$ et $P(f) = 0$
5. Prouver que T divise le polynôme $X^p - 1$. On pourra pour cela écrire la division euclidienne $X^p - 1$ par T, sous la forme $X^p - 1 = Q(X)T(X) + R(X)$.
6. Soit λ une racine de T. En posant $T(X) = (X - \lambda)Q(X)$, où Q est un polynôme tel que $\deg Q < n$, prouver que λ est une valeur propre de f.
7. Prouver que f est diagonalisable. (On pourra montrer que f possède nécessairement n valeurs propres distinctes.)