ASSEMBLEE DES CHAMBRES FRANCAISES DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE

EPREUVES ESC

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES

OPTION SCIENTIFIQUE

Année 1997

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document ;

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Problème I

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on considre la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par :$f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}e^{-x}$.

Partie 1

1. Etudier les variations de f_n.
2. Construire les courbes représentatives de f_1 et de f_2 dans le plan rapporté à un repre orthogonal (unités : $5\,cm$ sur l'axe des abcisses, $10\,cm$ sur l'axe des ordonnées).
3. On suppose dans cette question $n \geqslant 2$.
   (a) Montrer que f_n'' s'annule en changeant de signe pour deux racines u_n et v_n, telles que $0 < u_n < v_n$. Que peut-on en conclure pour la courbe représentative de f_n ?
   (b) On pose : $a_n = f_n(u_n)$ et $b_n = f_n(v_n)$. Expliciter $\ln\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$.
   (c) Donner le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction $u \mapsto \ln\left(\dfrac{1-u}{1+u}\right)$.
   (d) Déduire de ce qui précde la limite de la suite $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_{n\geqslant 2}$.
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n^{(n)}(x) = P_n(x).e^{-x}$, où P_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $\dfrac{(-1)^n}{n!}$.

Partie 2

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{n!}e^{-x}dx$ converge.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{n!}e^{-x}dx$.
   (a) Calculer I_0.
   (b) Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = I_{n+1}$.
   (c) En déduire la valeur de I_n.

Partie 3

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction d_n par :

$$\begin{cases} d_n(x) = \dfrac{1}{2}f_n(x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ d_n(x) = \dfrac{1}{2}f_n(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement d_1 et d_2 (unités : 5 : cm sur l'axe des abscisses, 20 : cm sur l'axe des ordonnées)
2. Montrer que d_n est une densité de probabilité d'une variable aléatoire absolument continue X_n.
3. Soit D_n la fonction de répartition de X_n. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad D_n(x) + D_n(-x) = 1$.
4. Pour $r \in \mathbb{N}$, calculer $E(X_n^r)$.

5. (a) Etablir, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, que :

$$\int_0^x f_n(t)dt = 1 - e^{-x}.\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right)$$

(b) En déduire, pour $x \in \mathbb{R}_+$ puis pour tout $x \in \mathbb{R}$, une expression de $D_n(x)$ sans signe intégrale.

Problème II

Partie 1

On considre l'ensemble:

$$E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} 4a-2b & a-2b & a+b \\ a-2b & 4a+b & a-2b \\ a+b & a-2b & 4a-2b \end{pmatrix} \quad / \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel réel; en donner une base et la dimension.
2. Montrer que tout élément de E est diagonalisable.
3. L'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique.
On note u et v les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont respectivement:

$$U = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Vérifier que $V \in E$. Calculer V^2 et en déduire les valeurs propres de v.

(b) Montrer que les vecteurs $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (-1,0,1)$, et $e_3 = (1,-2,1)$ sont des vecteurs propres de u et v.

(c) En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle u et v sont diagonales toutes les deux.

(d) Donner les valeurs propres d'un élément $M(a,b)$ de E.
Expliciter une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que ${}^tPM(a,b)P = D$.

Partie 2

On considre une suite d'expériences aléatoires. Chaque expérience n'admet que trois résultats possibles: E_1, E_2 et E_3.

Soit $n \in \mathbb{N}^\times$. A la $n^{ième}$ expérience, on associe la matrice colonne: $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ où a_n (respectivement b_n, c_n) est la probabilité d'obtenir le résultat E_1, (respectivement E_2 ,E_3).

En outre, on se donne $X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$, o a_0, b_0, c_0 sont trois réels tels que $a_0 + b_0 + c_0 = 1$.

Pour i et j éléments de $\{1,2,3\}$, on note $p_{i,j}$ la probabilité que E_j se réalise à une expérience, sachant que E_i s'est réalisé à l'expérience précédente.

La dépendance entre les réalisations successives est décrite par:

$$p_{i,j} = \frac{2}{3} \text{ si } i = j \text{ et } p_{i,j} = \alpha \text{ sinon.}$$

1. Calculer $(p_{1,1} + p_{1,2} + p_{1,3})$ de deux façons. En déduire la valeur de α.
2. Déterminer la matrice L telle que $\forall n \in \mathbb{N}, : X_{n+1} = LX_n$.

3. Vérifier que $L \in E$.
4. Calculer L^n pour tout entier n.
5. En déduire les expressions de a_n, b_n et c_n en fonction de a_0, b_0 et c_0.
   Etudier le comportement de a_n, b_n et c_n quand n tend vers $+\infty$.