ASSEMBLEE DES CHAMBRES FRANCAISES DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE

EPREUVES ESC

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES

OPTION TECHNOLOGIQUE

Année 1999

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document ;

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

Partie A

On considère dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ les 3 matrices suivantes:

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1} (tous les détails des calculs figureront sur la copie).

2. (a) Vérifier que : $P^{-1}MP = D$ et en déduire M en fonction de P, D et P^{-1}.
   (b) Déterminer D^n pour tout entier naturel n non nul.
   (c) En expliquant le raisonnement suivi, exprimer M^n en fonction de P, D et P^{-1} pour tout entier naturel n non nul.
   (d) Etablir que pour tout entier n non nul :

$$M^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n & 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n & 2 \end{pmatrix}$$

Partie B

Un tourniquet comprend 3 cases A, B et C. Au cours des instants successifs $0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ une boule se déplace sur le tourniquet de la manière suivante :

- A l'instant 0, la boule est en A.
- Si à l'instant n la boule est en A, à l'instant $n+1$ elle est en B ou en C avec équiprobabilité.
- Si à l'instant n la boule est en B, à l'instant $n+1$ elle est en A ou en C avec équiprobabilité.
- Si à l'instant n la boule est en C, elle y reste à l'instant $n+1$.

Pour n entier naturel, on désigne par :

- A_n l'événement "la boule est dans la case A à l'instant n"
- B_n l'événement "la boule est dans la case B à l'instant n"
- C_n l'événement "la boule est dans la case C à l'instant n"

et l'on note $a_n = P(A_n)$, $\quad b_n = P(B_n)$, $\quad c_n = P(C_n)$ et $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

1. (a) Donner les probabilités : $P(A_0), P(B_0), P(C_0)$.
   (b) Calculer $P(A_1), P(B_1), P(C_1)$ et vérifier que $P(A_1) + P(B_1) + P(C_1) = 1$.

2. Dans cette question n est un entier naturel non nul.

   (a) Donner les 9 probabilités suivante :
   - $P(A_{n+1}/A_n)$, $\quad P(B_{n+1}/B_n)$, et $P(C_{n+1}/C_n)$;

- $P(B_{n+1}/A_n)$ et $P(C_{n+1}/A_n)$;
- $P(A_{n+1}/B_n)$ et $P(C_{n+1}/B_n)$;
- $P(A_{n+1}/C_n)$ et $P(B_{n+1}/C_n)$

(b) A l'aide de la formule des probabilités totales, exprimer les probabilités a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction des probabilités a_n, b_n et c_n.

(c) En déduire que : $X_{n+1} = M.X_n$, M désignant la matrice de la **partie A**.

3. (a) Montrer par récurrence que : pour tout entier naturel n, $X_n = M^n.X_0$.

   (b) En déduire pour tout entier naturel les expressions de a_n, b_n et c_n en fonction de n et vérifier que $a_n + b_n + c_n = 1$.

4. Soit T la variable aléatoire égale au nombre de déplacements nécessaires pour que la boule atteigne C pour la première fois.
   k désignant un entier naturel non nul.

   (a) Vérifier que : $(T = k) = (A_{k-1} \cap C_k) \cup (B_{k-1} \cap C_k)$.

   (b) Exprimer $P(T = k)$ en fonction de k. Reconnaître la loi de T. Donner $E(T)$.

Exercice 2

Partie A

Soit f la fonction numérique définie sur $[1, +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x}{x - \ln x}$.
On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère du plan.

1. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   (b) En déduire la nature de la branche infinie de C en $+\infty$.

2. (a) Résoudre dans $[1, +\infty[$ l'inéquation : $1 - \ln x \geqslant 0$.

   (b) En déduire que $f'(x)$ s'annule et change de signe en $x = e$.

   (c) Donner le tableau de variation de f.

3. Donner les équations des tangentes à la courbe C aux points d'abscisses 1 et e.

4. Construire C ainsi que ses tangentes remarquables et asymptotes éventuelles dans un repère orthonormée d'unité 3 cm. On prendra : $e \simeq 2,7$, $\quad \dfrac{e}{e-1} \simeq 1,6$.

Partie B

Soit a un réel strictement plus grand que 1.
Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}\backslash\{0\}$ de loi définie par :
pour k entier naturel non nul, $P(T = k) = p.\left(\dfrac{\ln a}{a}\right)^{k-1}$, où p est une constante réelle strictement positive.
n désigne un entier naturel.

1. (a) Rappeler le signe de $\dfrac{\ln a}{a}$ et comparer le réel $\dfrac{\ln a}{a}$ au nombre 1. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{\ln a}{a}\right)^n$.

   (b) Pour tout réel x différent de 1, développer $(1+x+\cdots+x^{n-1})(1-x)$ et en déduire que : $\sum\limits_{k=1}^{n} x^{k-1} = \dfrac{1-x^n}{1-x}$.

2. On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{\ln a}{a}\right)^{k-1}$.

(a) Exprimer S_n en fonction de n et de $\dfrac{\ln a}{a}$.

(b) En déduire que : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = f(a)$, où f est la fonction définie dans la **partie A**.

3. (a) Montrer alors que la loi de T est bien définie pour : $p = 1 - \dfrac{\ln a}{a}$.

   (b) reconnaître la loi de T et donner $E(T)$.

Exercice 3

Partie A

On désigne par X la variable aléatoire "durée de vie" (en heures) d'un appareil ménager.
On suppose que X admet pour densité la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0,002e^{-0,002x} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

1. Reconnaître la loi de X. Donner $E(X)$ et $V(X)$. Déterminer la fonction de répartition de X.

2. (a) Calculer la probabilité pour qu'un appareil fonctionne au moins 800 heures.

   (b) Calculer la probabilité pour qu'un appareil fonctionne moins de 900 heures sachant qu'il a fonctionné au moins 800 heures.

On rappelle que $0,002 = \dfrac{1}{500}$ et on prendra : $e^{-\frac{8}{5} \simeq 0,202}$; $e^{-\frac{1}{5}} \simeq 0,819$

PartieB

Le taux de pannes d'une centrifugeuse étant trop élevé, son fabricant décide de rappeler les 10000 unités déjà vendues en France en diffusant un communiqué dans la presse.
On estime à $0,1$ la probabilité qu'une quelconque de ces centrifugeuses soit retournée à l'un des concessionnaires. Les retours sont indépendants les uns des autres.
Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de centrifugeuses retournées dans toute la France.

1. Reconnaître la loi de Z. Donner $E(Z)$, $V(Z)$.

2. (a) Justifier que l'on peut approcher la loi de Z par une loi normale (m, σ) dont on déterminera les paramètres.
   Tous les calculs suivants seront faits avec cette approximation et l'on ne tiendra pas compte de la correction de continuité.
   On désigne par Φ la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

   (b) Rappeler pour tout x réel la valeur de $\Phi(x) + \Phi(-x)$.

   (c) Exprimer $P(970 \leqslant Z \leqslant 1030)$ en fonction de $\Phi(1)$.

   (d) Déterminer le plus grand entier M tel que $P(Z \geqslant M) \geqslant 0,9772$.

Extrait de la table normale centrée réduite : $\Phi(1) = 0.8413\ldots$; $\Phi(2) = 0.9772\ldots$