ASSEMBLEE DES CHAMBRES FRANCAISES DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE

EPREUVES ESC

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES

OPTION ECONOMIQUE

Année 2002

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document ;

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1 : suite d'intégrales impropres.

On considère, pour n entier naturel non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+^\times$ par:

$$f_n(x) = \frac{n\ln x}{n+1+nx^2} \text{ pour tout réel } x \text{ strictement positif}$$

On définit également sur $\mathbb{R}_+^\times$ la fonction h par:

$$h(x) = \frac{\ln x}{1+x^2} \text{ pour tout } x \text{ strictement positif}$$

1. Montrer que les fonctions f_n et h sont continues sur $\mathbb{R}_+^\times$ et étudier leur signe.

   (a) Montrer que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$ est convergente et déterminer sa valeur.

   (b) Montrer que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} h(x)\ dx$ est convergente.

   Dans toute la suite de l'exercice on note alors K l'intégrale impropre: $K = \int_1^{+\infty} h(x)\ dx$.

2. (a) Montrer, grâce au changement de variable $u = \frac{1}{x}$ que $K = -\int_0^1 h(u)\ du$.

   (b) En déduire que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} |h(x)|\ dx$ converge et est égale à $2K$

   (c) En déduire également que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} h(x)\ dx$ converge et vaut 0.

3. (a) Montrer que pour tout réel x strictement positif, $|f_n(x)| \leqslant |h(x)|$.
   En déduire la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(x)\ dx$.

   (b) Montrer que pour tout réel x strictement positif, $h(x) - f_n(x) = \frac{h(x)}{n+1+nx^2}$.

   (c) En déduire successivement:

   $$0 \leqslant \int_1^{+\infty} (h(x) - f_n(x))\ dx \leqslant \frac{K}{n+1}$$

   $$-\frac{K}{n+1} \leqslant \int_0^1 (h(x) - f_n(x))\ dx \leqslant 0$$

   (d) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\ dx = 0$.

EXERCICE 2 : calcul matriciel et algèbre linéaire.

On considère un paramètre réel m, et les matrices suivantes:

$$A_m = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2+m & 2+m \\ -2 & -2-m & -2-m \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Montrer que A_m^2 et A_m^3 ne dépendent plus de m, et vérifier que: $A_m^3 = 2.A_m^2$.

(b) On suppose que λ est une valeur propre de A_m et que X est un vecteur propre associé à cette valeur propre λ. Montrer que: $\quad (\lambda^3 - 2\lambda^2)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et en déduire que : $\quad S_p(A_m) \subset \{0, 2\}$.

2. Dans cette série de questions on étudie le cas $m = 0$ et on cherche à diagonaliser A_0.

(a) Montrer que les réels 0 et 2 sont bien valeurs propres de A_0.

(b) Déterminer une base de chacun des deux sous-espaces propres de A_0.

(c) Montrer que A_0 est diagonalisable, et donner une matrice carrée inversible Q et une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ telles que $A_0 = QDQ^{-1}$.

(d) Montrer l'existence de deux réels a et b tels que $A_0^2 = aA_0 + bI_3$.

3. Dans cette série de questions, on suppose que le paramètre m est <u>non nul</u>.
On note $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f_m l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à $\mathcal{B}$ est A_m.

(a) Montrer que les réels 0 et 2 sont bien valeurs propres de f_m .

(b) Déterminer une base de chacun des deux sous-espaces propres de f_m.
La matrice A_m est-elle diagonalisable?

(c) On pose les vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} = (1, -1, 0) \quad ; \quad \overrightarrow{v} = f_m(\overrightarrow{u}) \quad ; \quad \overrightarrow{w} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3} = (1, 1, -1).$$

Calculer $\overrightarrow{v}$, $f_m(\overrightarrow{v})$ et $f_m(\overrightarrow{w})$.

(d) Montrer que la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et former la matrice de l'endomorphisme f_m relativement à cette base.

(e) En déduire une matrice carrée inversible P_m telle que $P_m^{-1} A_m P_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(f) Existe-t-il des réels c et d tels que $A_m^2 = cA_m + dI_3$?

EXERCICE 3 : v.a.r. usuelles, fonctions de deux variables, optimisation.

Dans tout l'exercice n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère deux variables aléatoires discrètes indépendantes X et Y telles que:
X suit une loi binomiale de paramètres n et x (notée $B(n, x)$ avec $x \in]0, 1[$).
Y suit une loi binomiale de paramètres n et y (notée $B(n, y)$ avec $y \in]0, 1[$).
On pose alors Z la variable aléatoire discrète définie par l'égalité: $\quad Z = 2n - X - Y$.

1. (a) Déterminer l'ensemble $Z(\Omega)$ des valeurs possibles de Z.

(b) Exprimer en fonction de n, x et y les probabilités:

$$P(Z = 0) \quad ; \quad P(Z = 2n) \quad ; \quad P(Z = 2n - 1) \quad ; \quad P(Z = 1)$$

(c) Donner les espérances et variances suivantes: $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$, $V(Y)$, et en déduire $E(X^2)$ et $E(Y^2)$.

(d) On pose W la variable aléatoire définie par $W = XYZ$.
Montrer que l'espérance de W est donnée par: $\quad E(W) = n^2(n-1)xy(2 - x - y)$.

2. On pose $D =]0,1[\times]0,1[$ et f la fonction de deux variables définie sur D par:

$$f(x,y) = xy(2-x-y) \text{ pour tout couple } (x,y) \text{ de } D$$

(a) Justifier que f est de classe C^2 sur D.

(b) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f, en déduire le seul point (x_0, y_0) de D (appelé "point critique") susceptible de réaliser un extremum local pour f.

(c) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f, et montrer que f admet un maximum local en (x_0, y_0) de valeur $\dfrac{8}{27}$.

(d) Montrer que pour tout couple (x,y) de D:

$$f(x,y) - \frac{8}{27} = \frac{1}{4}\left(y-\frac{2}{3}\right)^2\left(y-\frac{8}{3}\right) - y\left(x+\frac{1}{2}y-1\right)^2$$

En déduire que ce maximum local est un maximum global de f sur D.

3. On suppose que les variables X, Y définies plus haut représentent, en centimètres, la largeur et la longueur d'une brique, dont la hauteur Z est telle que la somme des côtés, $X+Y+Z$, est toujours égale à 56 cm, et de volume XYZ.

(a) Quelles sont les valeurs que l'on doit donner aux paramètres x et y pour que le volume moyen de la brique soit maximal?

(b) Montrer que ce volume moyen maximum est de 6272 cm^3.