ASSEMBLEE DES CHAMBRES FRANCAISES DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE

EPREUVES ESC

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES

OPTION TECHNOLOGIQUE

Année 2002

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document ;

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

On donne les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie A

1. Calculer J^2, J^3; en déduire par récurrence J^k pour tout entier k de $\mathbb{N}^\times$.
2. Déterminer deux nombres réels a et b tels que $A = aI + bJ$.
3. Montrer par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$, on a l'égalité $A^n = 2^n I + \left(\dfrac{4^n - 2^n}{2}\right) J$.
4. En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^\times$, A^n sous forme de tableau de nombres.

Partie B

1. La formule obtenue à la question A.3. est-elle encore valable pour $n = 0$? (on rappelle$A^0 = I$)
2. Montrer que la matrice A est inversible et calculer son inverse par la méthode du pivot de Gauss (les calculs figureront sur la copie).
3. La formule obtenue à la question A.3. est-elle encore valable pour $n = -1$? (justifier)

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x + 1 + 2\dfrac{\ln x}{x}$
On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal, l'unité de longueur étant 2 cm.

Partie A : étude de f et tracé de (C).

1. Etudier les branches infinies de (C). On montrera que la courbe admet pour asymptote oblique en $+\infty$ la droite (D) d'équation $y = x + 1$.
2. On pose pour tout réel x strictement positif : $u(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$
   (a) Etudier le sens de variation de u (on ne cherchera pas les limites de u).
   En déduire le signe de $u(x)$ sur $]0; +\infty[$.
   (b) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$a le même signe que $u(x)$.
   (c) Utiliser le résultat précédent pour déterminer le sens de variation de f, et dresser le tableau de variation de f.
3. Construction de la courbe (C) :
   (a) Etudier la position de (C) par rapport à la droite (D) d'équation $y = x + 1$.
   (b) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.
   (c) Tracer (D), (T) et (C) (On placera les points de la courbe d'abscisse $\dfrac{1}{2}, 1, e, 4$).
   On donne : $f(e) \approx 4,5;\quad f(1/2) \approx -1,3;\quad f(4) \approx 5,7$.

Partie B : approche de la solution de l'équation f(x) = x .

On admet que l'équation $f(x) = x$ a une solution unique dans $]\ 0; 1]$, notée α et on se propose d'approcher α par une suite récurrente.

1. Construire α sur le graphique de la question A.3.(c).

2. Soient g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{pour tout } n \in N,\ u_{n+1} = g(u_n) = e^{-\frac{1}{2}u_n} \end{cases}$$

   (a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ équivaut à l'équation $x = g(x)$. Que vaut donc $g(\alpha)$?

   (b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

   (c) Calculer $g'(x)$ et montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$, $|g'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.

   (d) En déduire à l'aide de l'inégalité des accroissements finis que pour tout entier n de $\mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}\,|u_n - \alpha|$$

   (on énoncera clairement le théorème utilisé et on justifiera que l'on est dans les conditions d'application).

3. Montrer alors que, pour tout entier naturel n, $\quad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

4. (a) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand n tend vers $+\infty$.

   (b) Déduire de la question B.3. une valeur entière n_0 à partir de laquelle le nombre u_n est une valeur approchée de α à 10^{-2} près
   Valeurs numériques : on pourra utiliser la valeur : $\dfrac{\ln 10}{\ln 2} \approx 3,32$.

Exercice 3

Une urne contient 2 boules rouges et une boule verte indiscernables au toucher.

Partie A

On effectue dans cette urne trois tirages successifs, avec remise de la boule tirée après chacun des tirages.
On note pour $i = 1, 2$ ou 3 : R_i :" La i -ième boule tirée est rouge " et V_i :" La i-ième boule tirée est verte " (donc $V_i = \bar{R}_i$)
On note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où le tirage a donné une boule rouge.

1. (a) Reconnaître la loi de X en justifiant votre réponse.
   Préciser les valeurs prises par X et les probabilités correspondantes.

   (b) Donner l'espérance et la variance de X.

2. On désigne par Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule rouge (dans le cas où au moins une boule rouge est tirée sur les trois).
   On donne à Y la valeur 0 si les tirages ont donné 3 boules vertes.

   (a) Décrire en fonction des événements R_i et V_i les événements suivants :
   $[(X = 2) \cap (Y = 1)]$, $\quad [(X = 1) \cap (Y = 3)]$, $\quad [(X = 3) \cap (Y = 2)]$
   et déterminer leur probabilité.

(b) Donner, sous la forme d'un tableau à double entrée, la loi du couple (X, Y).
(On justifiera pour l'exemple deux valeurs non traitées dans la question précédente)

(c) Expliquer comment retrouver la loi de X à partir du tableau.

(d) Donner la loi marginale de Y et calculer l'espérance $E(Y)$ de Y.

(e) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Calculer la covariance de X et de Y.

Partie B

On appelle " manche " l'expérience réalisée dans la partie A (Tirer successivement avec remise trois boules dans l'urne).
Pour jouer une manche, on mise 10 euros ; chaque boule rouge extraite rapporte 5 euros .
On appelle G la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros du joueur lors d'une manche (c'est-à-dire en tenant compte de la mise). Par exemple , si lors d'une manche on a extrait une seule boule rouge, alors G vaut - 10 euros + 5 euros = - 5 euros .

1. (a) Exprimer G en fonction de X.
   (b) En déduire le gain algébrique moyen d'un joueur. Le jeu est-il équitable ?
2. (a) Quelle est la probabilité d'obtenir un gain algébrique de 5 euros au cours d'une manche ?
   (b) Un joueur décide de jouer jusqu'à obtenir lors d'une manche un gain algébrique de 5 euros .
   Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de manches jouées quand le joueur s'arrête.
   Quelle est la loi suivie par Z ? Préciser l'espérance et la variance de Z.

Partie C

On effectue maintenant 450 tirages avec remise dans l'urne contenant deux boules rouges et une boule verte.
On note N la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues sur les 450 tirages.

1. Quelle est la loi suivie par N ? Que valent l'espérance et la variance de N ?
2. Montrer que la loi de N peut être approchée par une loi normale dont on précisera les paramètres.
3. A l'aide de cette approximation (et sans tenir compte de la correction de continuité), calculer la probabilité d'obtenir entre 290 et 310 boules rouges.
   On donne $\Phi(1) \approx 0,8413$ où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.