ASSEMBLEE DES CHAMBRES FRANCAISES DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE

EPREUVES ESC

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES

OPTION TECHNOLOGIQUE

Année 2003

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document ;

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

Partie A

Soient les matrices

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 6 & 8 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la matrice P est inversible et calculer sa matrice inverse P^{-1}.
2. Montrer que la matrice $P^{-1}MP$ est diagonale et égale à D. Déterminer D^n pour tout entier $n \geqslant 1$.
3. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$: $M^n = PD^nP^{-1}$.
4. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n :

$$M^n = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 6 - 6 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n & 6 + 16 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n & 6 - 6 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n \\ 3 - 3 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n & 3 + 8 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n & 3 - 3 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n \\ 2 + 9 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n & 2 - 24 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n & 2 + 9 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Partie B : Probabilités

Au club de vacances “ Les Flots Bleus ”, chaque jour, chaque enfant choisit une activité parmi trois possibilités : un jeu de ballon sur la plage, la planche à voile ou le ski nautique. Olivier est l'un de ces heureux vacanciers. On suppose que le premier jour, chaque enfant choisit au hasard. Ensuite , chaque jour :

- chaque enfant qui a choisi le jeu de ballon la veille reste fidèle à ce sport avec la probabilité $\frac{1}{2}$, change pour la planche à voile avec la probabilité $\frac{1}{4}$, ou change pour le ski nautique avec la probabilité $\frac{1}{4}$.
- chaque enfant qui a choisi la planche à voile la veille reste fidèle à ce sport avec la probabilité $\frac{1}{3}$ ou change pour le ballon avec la probabilité $\frac{2}{3}$.
- chaque enfant qui a choisi le ski nautique la veille reste fidèle à ce sport avec la probabilité $\frac{1}{4}$, change pour la planche à voile avec la probabilité $\frac{1}{4}$, ou change pour le ballon avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on définit les événements

- B_n “Olivier choisit le jeu de ballon le jour n”,
- V_n “Olivier choisit la voile le jour n”
- et S_n “Olivier choisit le ski nautique le jour n”.

On note leurs probabilités $b_n = P(B_n)$, $v_n = P(V_n)$ et $s_n = P(S_n)$.

1. Traduire les données de l'énoncé à l'aide des événements précédents.
   En particulier, on déterminera b_1, v_1 et s_1.

2. A l'aide de la formule des probabilités totales, exprimer b_{n+1}, v_{n+1} et s_{n+1} en fonction de b_n, v_n et s_n.

3. Pour tout entier naturel non nul n, on définit la matrice $X_n = \begin{pmatrix} b_n \\ v_n \\ s_n \end{pmatrix}$.

   Démontrer que pour tout entier naturel non nul n : $X_{n+1} = MX_n$ où M est la matrice de la **partie A**.

4. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n : $X_n = M^{n-1}X_1$.

5. En déduire b_n, v_n et s_n en fonction de n.

6. Calculer les limites de b_n, v_n et s_n quand n tend vers l'infini.

EXERCICE 2

Les **parties A** , **B** et **C** sont indépendantes et dans chaque partie l'urne considérée initialement est la suivante :

Une urne contenant 4 boules indiscernables au toucher : 1 blanche et 3 rouges.

Pour les parties **B** et **C** on pourra utiliser les événements R_k : " le k-ième tirage donne une boule rouge " et B_k : " le k-ième tirage donne une boule blanche ", pour k entier naturel non nul.

Partie A

1. On tire simultanément deux boules dans cette urne puis on les remet dans l'urne.
   Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules rouges ?

2. On effectue maintenant une succession de tirages simultanés de 2 boules dans cette urne (en remettant les boules dans l'urne après chaque tirage) jusqu'à obtenir un tirage constitué de 2 boules rouges.
   Soit N la variable aléatoire égale au rang du tirage où l'expérience s'arrête.

   (a) Quelles sont les valeurs prises par N ?
   (b) Reconnaître la loi de N. On précisera $P(N = k)$ pour tout entier $k \geqslant 1$.
   (c) En déduire son espérance et sa variance.
   (d) Calculer la probabilité que l'expérience s'arrête au plus tard au quatrième tirage.

Partie B

On effectue des tirages d'une boule sans remise dans l'urne jusqu'à obtenir une boule blanche.
Soit Y la variable aléatoire égale au rang du tirage où l'expérience s'arrête.

1. Quelles sont les valeurs prises par Y ?

2. Décrire l'événement $(Y = 2)$ et calculer $P(Y = 2)$.

3. Déterminer la loi de Y, son espérance $E(Y)$ et sa variance $V(Y)$.

4. Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges restant dans l'urne au moment où l'expérience s'arrête.
   Exprimer Z en fonction de Y.
   En déduire la loi de Z, son espérance $E(Z)$ et sa variance $V(Z)$.

Partie C

Dans cette partie, on effectue des tirages d'une boule avec remise dans l'urne jusqu'à ce que l'on obtienne 2 boules consécutives de la même couleur.
On note X la variable aléatoire égale au numéro (rang) du tirage où l'expérience s'arrête.
Par exemple si les tirages ont donné successivement rouge, blanc, rouge, blanc, rouge, rouge alors $X = 6$.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Calculer $P(X = 2)$ et $P(X = 3)$.
3. Décrire l'événement $(X = 4)$, puis l'événement $(X = 2k)$ pour tout entier $k \geqslant 1$ et montrer que pour tout entier naturel non nul k : $P(X = 2k) = \frac{5}{8}\left(\frac{3}{16}\right)^{k-1}$.
4. Décrire l'événement $(X = 5)$, puis l'événement $(X = 2k+1)$ pour tout entier $k \geqslant 1$ et montrer que pour tout entier naturel non nul k : $P(X = 2k+1) = \left(\frac{3}{16}\right)^{k}$.
5. Calculer les sommes $S_1 = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} P(X = 2k)$ et $S_2 = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} P(X = 2k+1)$. Vérifier que $S_1 + S_2 = 1$.
6. Calculer l'espérance de X. On rappelle que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ si $-1 < x < 1$.

EXERCICE 3

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(0) &= 0 \\ f(x) &= \dfrac{x^2}{e^x - 1} \quad \text{pour } x > 0 \end{cases}$

Soit (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité 2 cm).

Partie A

Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = (-x + 2)e^x - 2$ pour tout réel x positif ou nul.

1. Calculer la limite de g en $+\infty$.
2. Etudier les variations de la fonction g sur $[0, +\infty[$. (On précisera $g(0)$).
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution non nulle, notée α.
4. Etudier le signe de $g(x)$ sur $[0, +\infty[$ et montrer que $1 < \alpha < 2$. On donne $e \approx 2,7$.

Partie B

1. Rappeler $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$.
2. En déduire que f est continue et dérivable en 0.
   Préciser une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$, et donner une interprétation graphique de cette limite.
4. (a) Pour $x > 0$, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.
   (b) En déduire le tableau de variations de f , en y faisant apparaître le réel α défini au **A**,3).
   (c) Montrer que $f(\alpha) = \alpha(2 - \alpha)$, où α est le réel défini au **A**,3).
5. Tracer la courbe (C) en plaçant les tangentes aux points d'abscisses 0 et α. On donne $\alpha \approx 1,6$.

Partie C

Soit la suite $(u_n)_{n\in IN}$ définie par $\begin{cases} u_0 & = 1 \\ u_{n+1} & = f(u_n) \end{cases}$ pour tout entier naturel n

1. (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $0 < u_n \leqslant 1$.
   (b) Montrer que la suite est décroissante (on utilisera un raisonnement par récurrence).
   (c) En déduire que la suite est convergente (sa limite est étudiée dans les questions suivantes).
2. L'équation $f(x) = x$ a une solution évidente : le nombre 0.
   On se propose de rechercher s'il existe d'autres solutions à cette équation.
   (a) Montrer que dans $]0, +\infty[$, l'équation $f(x) = x$ équivaut à l'équation $e^x - x - 1 = 0$.
   (b) Etudier les variations de la fonction h définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = e^x - x - 1$.
   (c) En déduire que l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution dans $]0, +\infty[$.
3. Déterminer alors la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.