ASSEMBLEE DES CHAMBRES FRANCAISES DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE

EPREUVES ESC

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES

OPTION TECHNOLOGIQUE

Année 2004

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document ;

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

On donne les matrices :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 6 & 3 \\ -3 & 4 & 3 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Partie A

1. Montrer que la matrice P est inversible et calculer sa matrice inverse. Vérifier que $P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

2. (a) Donner D^n en fonction de n pour tout entier naturel n.

   (b) En déduire l'expression de $D^nP^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en fonction de n.

3. (a) Vérifier que $A = PDP^{-1}$puis montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :$A^n = PD^nP^{-1}$.

   (b) En déduire l'expression de $A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ en fonction de n pour tout entier naturel n.

Partie B

Les suites (x_n), (y_n) et (z_n) sont définies par les conditions initiales $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ et $z_0 = 0$ et par les égalités :

$$\text{pour tout entier nature } n, \quad \begin{cases} x_{n+1} = -\frac{5}{2}x_n + 3y_n + \frac{3}{2}z_n - 3 \\ y_{n+1} = -\frac{3}{2}x_n + 2y_n + \frac{3}{2}z_n - 1 \\ z_{n+1} = -\frac{3}{2}x_n + 3y_n + \frac{1}{2}z_n - 3 \end{cases}$$

On pose $B = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n : $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

1. Justifier pour tout entier naturel n l'égalité :

$$X_{n+1} = AX_n + B \qquad \text{relation(1)}$$

2. On se propose de trouver la matrice colonne $U \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que :

$$U = AU + B \qquad \text{relation(2)}$$

   (a) Montrer que la relation (2) équivaut à $(I - A)U = B$.

   (b) Calculer la matrice $A(I - A)$. En déduire que : $-2U = AB$ puis , que $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

3. (a) A l'aide des relations (1) et (2), montrer que : $X_{n+1} - U = A(X_n - U)$.

   (b) En déduire, par récurrence, que pour tout entier naturel n on a : $X_n - U = A^n(X_0 - U)$.

4. En utilisant l'expression obtenue dans la **partie A** , question 3(b) , calculer x_n, y_n et z_n, en fonction de n.

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(t) = 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ f(t) = \dfrac{1}{8} & \text{si} \quad 0 \leqslant t \leqslant 4 \\ f(t) = \dfrac{2}{t^2} & \text{si} \quad t > 4 \end{cases}$$

1. (a) Vérifier que f est positive.
   (b) Montrer que f est continue au point $t = 4$.
   (c) Déterminer la limite de f lorsque t tend vers $+\infty$.
   (d) Calculer la dérivée $f'(t)$ pour $t > 4$ et donner son signe.
   (e) Donner l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthogonal d'unités 1cm en abscisse et 16cm en ordonnée.
   Placer sur cette courbe les points d'abscisse $t = -2, \quad t = 2, \quad t = 8$.

2. (a) Soit x un réel supérieur ou égal à 4. Calculer $\int\limits_4^x f(t)dt$.
   En déduire que l'intégrale impropre $\int\limits_4^{+\infty} f(t)dt$converge et vaut $\dfrac{1}{2}$.
   (b) Calculer $\int\limits_0^{+\infty} f(t)dt$

3. La fonction f étant nulle sur $]-\infty; 0[$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction F par :

$$\text{Pour tout réel } x, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

   (a) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.
   (b) On considère une variable aléatoire à densité X dont la fonction de répartition est F.
   Montrer que la variable aléatoire X n'admet pas d'espérance.
   (c) Déterminer $P(X > 4), \quad P(3 < X \leqslant 4), \quad P(X \leqslant 5 / X > 4)$ (probabilité conditionnelle).
   (d) Résoudre l'équation d'inconnue réelle x : $F(x) = \dfrac{3}{4}$.

EXERCICE 3

Les parties A et B sont , dans une large mesure , indépendantes.

On suppose que N est un entier naturel non nul fixé et on lance une pièce équilibrée N fois de suite.
On note X la variable aléatoire réelle égale au rang où apparait PILE pour la première fois , et on convient que si PILE n'est pas apparu au cours des N lancers , la variable X prend la valeur 0.
Ainsi :

$$\begin{cases} \text{si PILE n'est pas apparu au cours des } N \text{ lancers,} \quad X = 0 \\ \text{si PILE est apparu pour la première fois au rang } k, \quad X = k \end{cases}$$

Partie A : Etude de la loi de X.

1. Montrer que l'univers image $X(\Omega)$ est $\{0, 1, \cdots, N\}$.

2. Déterminer $P(X = 0)$.

3. Montrer que pour tout entier naturel k de $\{1, \cdots, N\}$, $P(X = k) = \dfrac{1}{2^k}$.

Partie B : Calcul de l'espérance mathématique de la variable X.

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rl} & u_0 = 1 \\ \text{Pour tout entier naturel } n, & u_{n+1} = 2u_n + n - 1 \end{array}\right.$$

1. (a) Montrer que $u_1 = 1$ et $u_2 = 2$. Calculer u_3.
   (b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n \geqslant 1$.
   (c) En déduire sans récurrence que pour tout entier naturel non nul n , $u_n \geqslant n$.
   Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   (d) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$est croissante.

2. Dans cette question on examine une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$définie à partir de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

   On pose pour tout entier naturel n , $\quad v_n = n + u_n$.

   (a) Exprimer v_{n+1} en fonction de n et u_n.
   (b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et exprimer, pour tout entier naturel n , v_n en fonction de n uniquement.
   (c) Montrer enfin que pour tout entier naturel n , $u_n = 2^n - n$.

3. (a) En reprenant la définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que pour tout entier naturel n :

   $$\frac{u_{n+1} - 1}{2^n} = \frac{u_n - 1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n}.$$

   (b) En déduire par récurrence sur n que pour tout entier naturel n non nul

   $$\frac{u_n - 1}{2^{n-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k}$$

   (c) Montrer finalement sans récurrence que pour tout entier naturel non nul n :

   $$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+1}{2^{n-1}}.$$

   (d) En déduire en fonction de N l'espérance de la variable aléatoire X.