ASSEMBLEE DES CHAMBRES FRANCAISES DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE

EPREUVES ESC

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES

OPTION TECHNOLOGIQUE

Année 2005

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document ;

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

Soient les matrices carrées :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note I la matrice-unité d'ordre 3.

1. (a) Montrer à l'aide du pivot de Gauss que P est inversible et calculer son inverse.

   (b) Vérifier la relation :
   $$P^{-1}AP = D$$

   (c) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul :
   $$A^n = PD^nP^{-1}$$

   (d) Vérifier :
   $$P^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Et en déduire que pour tout :
   $$A^n\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

   On considère désormais deux urnes :
   Une urne bleue contenant initialement un jeton marqué 0 et un jeton marqué 1.
   Une urne rouge contenant initialement un jeton marqué 0 et un jeton marqué 1.
   On appelle « échange » l'action consistant à extraire simultanément un jeton de chaque urne puis à le remettre dans l'autre urne. On effectue des échanges successifs indéfiniment.
   Pour tout entier naturel non nul n on désigne par Z_n la variable aléatoire réelle discrète égale à la somme des points marqués sur les jetons de l'urne bleue après le n-ième échange.
   On note Z_0 la variable certaine égale à 1, somme initiale des points dans l'urne bleue.

2. Donner l'ensemble des valeurs possibles de Z_1 et déterminer la loi de Z_1.

3. (a) Soit n un entier naturel non nul. Déterminer les probabilités conditionnelles :
   $$p_{(Z_n=0)}(Z_{n+1}=0), \quad p_{(Z_n=1)}(Z_{n+1}=0), \quad p_{(Z_n=2)}(Z_{n+1}=0)$$

   On note dans la suite et pour tout entier naturel n :
   $$p_n = p(Z_n = 0), \quad q_n = p(Z_n = 1), \quad r_n = p(Z_n = 2)$$

   (Ce qui entraîne $p_0 = 0$, $q_0 = 1$, $r_0 = 0$).

(b) Grâce à la question **a.** et à une formule de probabilités totales, exprimer p_{n+1} en fonction de q_n.

(c) Donner les relations similaires fournissant q_{n+1} en fonction de p_n, q_n, r_n et r_{n+1} en fonction de q_n.

4. On note pour tout entier naturel n :

$$U_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$$

(a) Vérifier que pour tout entier naturel n non nul :

$$U_{n+1} = AU_n$$

Cette relation est-elle valable pour $n = 0$?

(b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$U_n = A^n U_0$$

(c) En déduire pour $n \geqslant 1$, p_n, q_n, r_n en fonction de n ainsi que $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q_n$, $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n$.

5. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire Z_n ainsi que sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{1}{e^t + 2 + e^{-t}}$$

1. (a) Montrer que f est positive et continue sur $\mathbb{R}$.
Vérifier que f est paire.

(b) Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$.

(c) Pour tout réel t, calculer $f'(t)$ et étudier son signe.
En déduire le tableau des variations de f.

(d) Tracer l'allure de la courbe représentative (C) de f.

2. (a) Vérifier que pour tout réel t :

$$f(t) = \frac{e^t}{(e^t + 1)^2}$$

(b) On pose pour tous réels a et b tels que $a \leqslant b$ l'intégrale :

$$J(a, b) = \int_a^b f(t)\, dt$$

Montrer que :

$$J(a, b) = \frac{1}{1 + e^a} - \frac{1}{1 + e^b}$$

(c) En déduire la nature et la valeur des intégrales impropres suivantes :

$$I = \int_0^{+\infty} f(t)\, dt, \quad J = \int_{-\infty}^{0} f(t)\, dt, \quad K = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt,$$

3. Soit la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par, pour tout réel x :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

(a) A l'aide de la question **2.b.**, montrer que :

$$F(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

(b) On considère une variable aléatoire à densité X dont la fonction de répartition est F.
Déterminer $p(X \leqslant \ln 2)$, $p(-\ln 2 < X \leqslant \ln 2)$.
Déterminer la probabilité conditionnelle $p_{(X > \ln 2)}(X_{X \leqslant \ln 3})$.

(c) Montrer que pour tout réel x :

$$F(-x) = 1 - F(x).$$

En déduire l'unique réel positif α tel que $p(-\alpha < X \leqslant \alpha) = \dfrac{1}{2}$.

EXERCICE 3

Soit n un entier naturel non nul et X une variable aléatoire réelle discrète dont l'univers image $X(\Omega)$ est inclus dans l'ensemble $\{0, 1, ..., n\}$.

$E(X) = \sum\limits_{k=1}^{n} kp(X = k)$ est l'espérance mathématique de X.

L'objectif de cet exercice est de prouver et d'utiliser l'égalité $E(X) = \sum\limits_{k=1}^{n} p(X \geqslant k)$, notée (**R**).

1. Etude d'un exemple. Soit X qui suit une loi binomiale de paramètres 2 et $\dfrac{3}{4}$.

(a) Calculer $p(X \geqslant 1) + p(X \geqslant 2)$.

(b) Donner la valeur de l'espérance $E(X)$. Vérifier l'égalité (**R**).

2. On revient au cas général : X est telle que $X(\Omega)$ est inclus dans l'ensemble $\{0, 1, ..., n\}$.

(a) Justifier pour $k \in \{1, ..., n\}$ l'égalité :

$$p(X \geqslant k) = p(X = k) + p(X = k + 1) + ... + p(X = n)$$

(b) En écrivant puis en sommant les égalités précédentes de $k = 1$ à n, en déduire l'égalité (**R**).

3. Application sur un exemple :
Un jeu vidéo est constitué de n niveaux successifs.
Lorsque le joueur commence un niveau, ce qui suppose qu'il ait réussi tous les niveaux précédents, la probabilité qu'il le réussisse est $\dfrac{2}{3}$. Le jeu s'arrête dès que le joueur échoue à un niveau.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de niveaux réussis par le joueur.

(a) Donner $X(\Omega)$.

(b) On note N_j l'événement « Le joueur a réussi le niveau j ».
Exprimer pour tout entier naturel k de $\{1, ..., n\}$ l'événement à l'aide des événements N_1, N_2,..., N_k.
En déduire :

$$p(X \geqslant k) = \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

(c) En utilisant la formule (**R**), calculer l'espérance $E(X)$.