ASSEMBLEE DES CHAMBRES FRANCAISES DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE

EPREUVES ESC

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES

OPTION TECHNOLOGIQUE

Année 2006

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document ;

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

Soient les matrices carrées : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. (a) Montrer que $A^2 = 3I - 2A$. En déduire que A est inversible et détailler la matrice A^{-1}.
   (b) Montrer qu'il existe un réel a tel que $AH = aH$.
   (c) Montrer qu'il existe un réel b tel que $A = I + bH$.

   On considère la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} b_0 = 0 \\ \text{Pour tout entier naturel } n, \quad b_{n+1} = -3b_n + 2. \end{cases}$$

2. (a) Sans calculer b_n, montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $A^n = I + b_n H$.
   (b) En déduire $A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3b_n + 3 \\ b_n + 3 \end{pmatrix}$
   (c) Calculer b_n en fonction de n, puis exprimer la matrice colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 3b_n + 3 \\ b_n + 3 \end{pmatrix}$ en fonction de n.

   On considère maintenant les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = v_0 = 3 \\ \text{Pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = 6 - 5u_n + 6v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = 2 - 2u_n + 3v_n. \end{cases}$$

   On note, pour tout entier naturel n, $X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

3. (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.
   (c) Calculer finalement u_n et v_n en fonction de n.

EXERCICE 2

On considère une constante réelle A strictement supérieure à 1.
On note alors f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t \ln A} & \text{si } 1 \leqslant t \leqslant A \\ 0 & \text{si } t < 1 \text{ ou } t > A \end{cases}$$

1.

   (a) Justifier que pour tout réel t, $f(t) \geqslant 0$.

   (b) Calculer $f'(t)$ dans les trois cas suivants : $t < 1$, $\quad 1 < t < A$, $\quad t > A$.
   Quel est le sens de variation de f sur l'intervalle $]1; A[$?

   (c) Dans cette question uniquement on suppose que $A = 2$. On donne $\dfrac{1}{\ln 2} \simeq 1,4$.
   Tracer l'allure de la courbe de f dans un repère orthonormé d'unité 5cm.

On note F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

2. (a) Calculer $F(x)$ dans le cas où $x < 1$.

   (b) Montrer que si $1 \leqslant x \leqslant A$, $F(x) = \dfrac{\ln x}{\ln A}$. Donner $F(A)$.

   (c) Montrer que pour tout réel $x > A$, $F(x) = 1$.
   On dit qu'une variable aléatoire T suit la **loi de Benford de paramètre A** lorsque cette variable aléatoire T est une variable à densité, de densité f et de fonction de répartition F.
   On suppose dans toute la suite que X suit une **loi de Benford de paramètre 10** et on remplace doncle réel A par 10 dans les expressions de f et de F.

3. (a) Montrer que l'espérance de X vaut $E(X) = \dfrac{9}{\ln 10}$

   (b) Soient a, b et c trois réels tels que : $1 \leqslant a < b \leqslant 10, \quad 1 \leqslant ac \leqslant bc \leqslant 10$.
   Calculer en fonction de a et b les probabilités : $P(a < X \leqslant b)$ et $P(ac < X \leqslant bc)$.
   Montrer qu'elles sont égales. (On dit que la **loi de Benford** est invariante par changement d'échelle).

4. On note Y la variable aléatoire définie par $Y = X^2$.

   (a) Soit y un réel strictement inférieur à 1. Justifier que $P(Y \leqslant y) = 0$.

   (b) Soit y un réel strictement supérieur à 100. Justifier que $P(Y \leqslant y) = 1$.

   (c) Montrer que $P(Y \leqslant 64) = P(X \leqslant 8) = \dfrac{3 \ln 2}{\ln 10}$.

   (d) Plus généralement, soit y un réel appartenant à $[1; 100]$: Montrer que $P(Y \leqslant y) = \dfrac{\ln y}{2 \ln 10}$.

   (e) Déterminer une densité de Y et montrer que Y suit une **loi de Benford** de paramètre 100.

EXERCICE 3

Les parties B et C sont indépendantes

On considère trois urnes : l'urne U_1 contient deux boules rouges et trois boules bleues, l'urne U_2 contient une boule rouge et aucune boule bleue et l'urne U_3 contient une boule bleue et aucune boule rouge.On choisit d'abord une de ces trois urnes au hasard avec équiprobabilité. Une fois cette urne choisie, on effectue dans cette urne et sans jamais en changer une série illimitée de tirages d'une boule, avec remise dans cette urne. Pour $i = 1, 2, 3$ on note U_i l'événement : « l'urne choisie pour les tirages est l'urne U_i ».Pour tout entier naturel non nul k, on note R_k :« le k-ième tirage a amené une boule rouge ».

Partie A

1. Justifier que les événements (U_1, U_2, U_3) forment un système complet d'événements.
   Soit $k \in \mathbb{N}^\times$. Donner les probabilités conditionnelles $P_{U_1}(R_k)$, $P_{U_2}(R_k)$, $P_{U_3}(R_k)$.
   En déduire $P(R_k) = \dfrac{7}{15}$.
2. Soit n un entier naturel non nul.
   (a) Justifier que $P_{U_1}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) = \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.
   (b) Préciser les valeurs de $P_{U_2}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n)$ et $P_{U_3}(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n)$.
   En déduire par formule des probabilités totales que $P(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_n) = \frac{1}{3}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n + \dfrac{1}{3}$.
3. Montrer que les événements R_1 et R_2 ne sont pas indépendants.

Partie B

1. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 2$, $P_{R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_{k-1}}(R_k) = \dfrac{1 + (\frac{2}{5})^k}{1 + (\frac{2}{5})^{k-1}}$.
2. On note Z la variable aléatoire égale au rang où une boule bleue apparait pour la première fois, et égale à 0 si aucune boule bleue n'apparait jamais.
   (a) Justifier que $P(Z = 1) = \dfrac{8}{15}$.
   (b) Soit un entier $k \geqslant 2$. Montrer que $P(Z = k) = P(R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_{k-1}) P_{R_1 \cap R_2 \cap \cdots \cap R_{k-1}}(\bar{R}_k)$.
   En déduire grâce aux questions précédentes que pour tout entier $k \geqslant 2$, $P(Z = k) = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{k-1}$.
   (c) Calculer $P(Z = 1) + \sum\limits_{k=2}^{+\infty} P(Z = k)$ et en déduire $P(Z = 0)$.

Partie C

Dans cette partie on s'intéresse à la variable aléatoire X égale au nombre de tirages ayant amené une boule rougeau cours des 200 premiers tirages.

1. (a) Donner $X(\Omega)$.
   (b) Soit k un entier de $\{0, ..., 200\}$. Justifier que $P_{U_1}(X = k) = \binom{200}{k}\left(\dfrac{2}{5}\right)^k \left(\dfrac{3}{5}\right)^{200-k}$.
   (c) Montrer que pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant 199$, $P(X = k) = \dfrac{1}{3} P_{U_1}(X = k)$.

2. On approchera toute variable T de loi binomiale $\mathcal{B}\left(200, \frac{2}{5}\right)$ par une variable N de loi normale $N(80, 48)$:

   (a) Montrer que $P(60 < T \leqslant 100) \approx P(-\frac{5}{12} < \frac{N-80}{48} \leqslant \frac{5}{12})$.

   (b) Utiliser cette approximation pour montrer que $P(60 < X \leqslant 100) \simeq 0,11$.
   (On donne:$\Phi(\frac{5}{12}) \simeq 0,66$,où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite)