Concours National des E.S.C.A.E.

Option Générale

Concours National d'admission 1980

MATHEMATIQUES I

Algèbre et analyse

Cette épreuve est constituée d'un problème unique comprenant trois parties

Première partie

Soit la fonction $\varphi \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 + x - x\ln|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$

Les notations ln et $||$ désignent respectivement le logarithme népérien et la valeur absolue.
Soit (C) la représentation graphique de cette fonction dans un repère orthonormé $\{O, (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})\}$.

1. Montrer que la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier la dérivabilité de cette fonction sur $\mathbb{R}$.
   Quand elle existe, définir la fonction dérivée de φ.
   Préciser la tangente à la courbe (C) au point $\Omega(0, 1)$.
3. Montrer que Ω est centre de symétrie de (C).
4. Etudier les branches infinies de (C) et dresser le tableau de variations de φ.
5. Montrer que la courbe (C) coupe l'axe de repère $\{O, \overrightarrow{i}\}$ en un point d'abscisse x_0 ($x_0 > 1$).
   Déterminer la valeur approchée de x_0 à $0,01$ près par défaut.
6. Construire la courbe (C).
7. Soit la droite (D) d'équation $y = x + 1$.
   (a) Déterminer, par leurs coordonnées, les points d'intersection de (C) et (D).
   (b) Pour tout réel t, on pose $\gamma(t) = t + 1$.
   Prouver, pour tout réel x, l'existence de l'intégrale
   $$\Phi(x) = \int_0^x [\varphi(t) - \gamma(t)]dt$$
   et calculer cette intégrale.
   (c) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $\Phi(x) = 0$. Interpréter graphiquement ce résultat.
   (d) Calculer l'aire du domaine Δ ensemble des points $M(x, y)$ tels que :
   $$\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 0 \leqslant y \leqslant \varphi(x) \end{cases}$$

Deuxième partie

On rappelle que l'ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions numériques continues sur $\mathbb{R}$, muni de l'addition usuelle des fonctions et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
On considère les fonctions

$$\varphi_1 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 \end{array} \right. \qquad \varphi_2 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array} \right. \qquad \varphi_3 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x\ln|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

1. Montrer que $\mathcal{B} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une famille libre de $\mathcal{F}$.
   Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$ engendré par $\mathcal{B}$.
   Montrer que la fonction φ définie dans la première partie est un élément de E et donner ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

2. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Soit U de coordonnées (a, b, c) dans la base $\mathcal{B}$.
   Quelles sont, dans cette base, les coordonnées de $f(U)$?

   (b) Montrer que l'endomorphisme f est bijectif et déterminer, relativement à $\mathcal{B}$, la matrice de l'endomorphisme réciproque f^{-1}.

   (c) Résoudre dans E, l'équation $f(U) = \varphi$, φ étant la fonction définie dans la première partie.

3. On pose $M' = M - I$, I étant la matrice unité d'ordre 3.

   (a) Montrer que M' n'est pas inversible.

   (b) Soit g l'endomorphisme de E dont la matrice relativement à $\mathcal{B}$ est M'.
   Déterminer une base de $\mathrm{Im}(g)$.
   En déduire le rang de g et la dimension de $\ker(g)$.

4. Vérifier la relation $(M - I)(M + 3I) = 0$ où 0 désigne la matrice nulle d'ordre 3.
   Montrer que cette relation permet de retrouver les résultats des questions 2°b et 3°a.

Troisième partie

1. On pose : $\begin{cases} M^0 = I \\ \text{et} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad M^{n+1} = M^n \times M \end{cases}$

   (a) Exprimer M^2 en fonction de M et I.
   Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = u_n M + v_n I$, où u_n et v_n vérifient les relations

$$\begin{cases} u_0 = 0 \quad v_0 = 1 \\ \text{et} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} = -2u_n + v_n \\ v_{n+1} = 3u_n \end{cases} \end{cases}$$

   (b) Vérifier la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} + v_{n+1} = u_n + v_n = 1$$

   En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -3u_n + 1$$

   Exprimer u_n, v_n et M^n en fonction de n.

2. On se propose de déterminer u_n et v_n par une autre méthode.

   (a) Déterminer la matrice A telle que, pour tout entier naturel n :

   $$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

   > La méthode étudiée dans cette question consiste à déterminer A^n puisque, pour tout entier nature n : $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \times \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$

   (b) On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.
   Calculer P^2. En déduire P^{-1} puis P^n pour tout entier naturel n.

   (c) Calculer $A' = P^{-1} \times A \times P$.
   En déduire $(A')^n$ puis A^n pour tout entier naturel n.
   Retrouver ainsi les valeurs respectives de u_n et v_n en fonction de n.