

Concours National d'admission 1981

MATHEMATIQUES I

Algèbre et analyse

Cette épreuve est constituée d'un problème unique comprenant quatre parties largement indépendantes.

I. On considère la fonction : $f_1 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^{-x^2} \end{array} \right.$

1° Etudier f_1 et tracer sa courbe représentative C_1 dans un repère orthonormé $\mathcal{R}_1$ du plan (*unité graphique* : 10 cm).

2° Soit g la restriction de f_1 à l'intervalle $I = [0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$. Démontrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle K que l'on précisera.

Démontrer de même que la restriction h de f_1 à $[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty[$ réalise une bijection de I sur un intervalle K' inclus dans K .

[On ne cherchera pas à expliciter $g^{-1}(x)$ et $h^{-1}(x)$]

3° Dresser les tableaux de variations de g^{-1} et h^{-1} .

Construire les représentations graphiques de g^{-1} et h^{-1} dans le repère $\mathcal{R}_1$.

4° Etudier la dérivabilité des deux fonctions g^{-1} et h^{-1} . Préciser les limites de leurs dérivées aux bornes de leurs ensembles de définition.

II. Dans cette partie, on se propose d'étudier la famille de fonctions :

$$f_\alpha \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^\alpha e^{-x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

où α désigne un paramètre réel strictement positif.

On note C_α la courbe représentative de f_α dans un repère orthonormé $\mathcal{R}_2$ du plan (*unité graphique* : 10 cm)

1° Etudier la continuité de f_α sur $\mathbb{R}_+$.

2° Déterminer, selon les valeurs de α , la demi-tangente en O à C_α .

3° Pour x strictement positif, calculer $f'_\alpha(x)$.

4° Soit M_α le point de C_α d'abscisse $\sqrt{\frac{\alpha}{2}}$.

Donner, sous la forme $y = m(\alpha)$, une équation de l'ensemble Γ des points M_α quand α décrit $\mathbb{R}_+^\times$. Etudier les variations de m (sens de variation, branche infinie, étude locale en 0) et tracer Γ dans le repère $\mathcal{R}_2$.

5° Tracer $C_{1/2}$ et $C_{9/2}$ dans le repère $\mathcal{R}_2$.

III. On appelle $(E, +, \cdot)$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, E_1 le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à deux ainsi que du polynôme nul, B la base (p_0, p_1, p_2) de E_1 , avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x, \quad p_2(x) = x^2.$$

On désigne par φ l'application qui à toute fonction f de E associe la fonction $F = \varphi(f)$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x f(t)e^{-t^2} dt$$

1° Etablir, pour toute fonction f de E la continuité et la dérivabilité de $F = \varphi(f)$.

Expliciter $F'(x)$ pour x réel.

2° Démontrer que φ est un endomorphisme de E .

Etablir qu'il est injectif.

Est-il surjectif ?

3° Soit ψ la restriction de φ de E_1 .

Exprimer $\psi(p_0)$, $\psi(p_1)$ et $\psi(p_2)$ à l'aide des fonctions u_0 , u_1 et u_2 définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u_0(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad u_1(x) = 1 - e^{-x^2}, \quad u_2(x) = xe^{-x^2}$$

[On ne cherchera pas à calculer $u_0(x)$]

4° Montrer que u_0 , u_1 et u_2 sont des éléments de $\psi(E_1)$ puis que $C = (u_0, u_1, u_2)$ est une base de $\psi(E_1)$.

Donner la matrice de ψ relativement aux bases B et C .

5° Déterminer une base B' de E_1 telle que la matrice de ψ relativement aux bases B' et C soit la matrice unité d'ordre 3.

Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad k(x) = e^{-x^2}(2 - 3x) - 2$.

Résoudre dans E_1 , l'équation $\psi(f) = k$ puis, dans E , l'équation $\varphi(f) = k$.

IV. On rappelle que : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

1° Etablir l'existence et calculer :

a) $\int_0^{+\infty} te^{-t^2} dt$.

b) $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ (on utilisera un changement de variable).

2° Pour tout entier naturel non nul n , on note :

$$p_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{array} \right.$$

p_0 désignant toujours l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 \end{array}$.

Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, une relation de récurrence entre $\varphi(p_{n+1})$ et $\varphi(p_n)$.

3° En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$, l'existence et le calcul des intégrales

$$I_n = \int_0^{+\infty} p_n(t)e^{-t^2} dt$$

puis l'expression des intégrales

$$J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} p_n(t)e^{-t^2} dt$$