Concours National des E.S.C.A.E.

Option économique

**Concours National d'admission 1982**

MATHEMATIQUES I

Algèbre et analyse

---

# PROBLEME N° 1

1. On considère la fonction
$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\times & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t - \ln|t| \end{array} \right.$$
ln représente la fonction logarithme népérien.

   (a) Etudier succinctement les variations de $g$.

   (b) En déduire l'existence d'un réel $t_0$ unique vérifiant : $g(t_0) = 0$.

   (c) Donner une valeur approchée de $t_0$ à $10^{-2}$ près par défaut.
   Préciser le signe de $g(t)$ suivant les valeurs de $t$.

2. Soit la fonction :
$$\varphi \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R}\backslash\{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \ln\left|1 - \dfrac{1}{x}\right| + x - 1 \quad \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \mapsto & -1 \end{array} \right.$$
On appelle $\Gamma$ la courbe représentative de $\varphi$ dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ Unité 2 cm.

   (a) Etudier la continuité de $\varphi$ sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.

   (b) Etudier les limites de $\varphi$ en 1, $+\infty$ et $-\infty$.

   (c) Montrer que la droite $\Delta$ d'équation $y = x - 2$ est asymptote à la courbe $\Gamma$.
   Etudier la position de $\Gamma$ par rapport à $\Delta$ dans les demi-plans d'équations $x < 0$ et $x > 1$.
   (On posera $t = 1 - \dfrac{1}{x}$)

   (d) Etudier la dérivabilité de $\varphi$ sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.
   Calculer $\varphi'(x)$ pour $x$ élément de $\mathbb{R}^\times\backslash\{1\}$
   Montrer que $\varphi'(x) = g(t)$ où $t = \dfrac{x}{x-1}$.
   On désignera par $x_0$ l'unique solution de $\varphi'(x) = 0$.
   En déduire le tableau des variations de $\varphi$.

   (e) Exprimer $\varphi(x_0)$ en fonction polynôme de $t_0$.
   Donner les valeurs approchées à $10^{-2}$ près par défaut de $x_0$ et de $\varphi(x_0)$.

   (f) Tracer avec soin la courbe $\Gamma$

## PROBLEME N° 2

I. On considère la fonction $f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\times} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 18.(1,09)^x - 12.(1,13)^x \end{array} \right.$

On appelle $C$ la courbe représentative de $f$ dans un plan rapporté à un repère orthogonal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. [unités graphiques : 1 cm en abscisse, 2 cm en ordonnée]

1° a) Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer la fonction dérivée de $f$.

b) Etudier les variations de $f$.

c) Déterminer les valeurs approchées à $10^{-2}$ près des coordonnées du point de $C$ en lequel la tangente est parallèle à l'axe $(O, \overrightarrow{i})$.

2° Etudier la limite de $f$ en $-\infty$. Qu'en conclut-on ?
Etudier la limite de $f$ en $+\infty$.

3° Déterminer une valeur approchée à $10^{-2}$ près de l'abscisse $\lambda$ du point d'intersection de $C$ à l'axe $(O, \overrightarrow{i})$.

4° Tracer avec précision la courbe $C$.
(On se limitera à l'intervalle $[-5, 12]$ en abscisse et on placera les points de $C$ d'abscisses $-5$, 0, 3, 6, 9 et 12 après en avoir calculé les ordonnées à $10^{-2}$ près)

5° a) Déterminer une primitive $F$ de $f$ sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire l'aire de la partie du plan délimité par la courbe $C$, l'axe $(O, \overrightarrow{i})$, et les droites $x = 0$ et $x = \lambda$.
Le résultat sera donné, à $10^{-2}$ près, en cm$^2$.

II. Une entreprise dispose d'un capital initial de 600 000 F
Ce capital est placé le $1^{er}$ janvier 1981 au taux annuel de 9 %. Les intérêts s'ajoutent au capital au 31 décembre de chaque année.
Cette entreprise décide par ailleurs de louer, à partir du $1^{er}$ janvier 1982, des locaux supplémentaires pour étendre son activités.
Le montant de la location, payable d'avance le 31 décembre de chaque année, est fixé, pour le premier versement, le 31 décembre à 48 000 F. Il subit d'autre part une augmentation annuelle de 13 %. Le loyer est prélevé sur le capital.

1° Déterminer le capital $u_1$ disponible au $1^{er}$ janvier 1982.

2° Soit $v_n$ le montant de la location pour la $n^{ième}$ année.
Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^{\times}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison, et le premier terme.

3° On appelle $u_n$ le capital disponible après le versement du $n^{ième}$ montant de la location et comptabilisation des intérêts.
Exprimer $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$ et $v_{n+1}$.
Exprimer $u_{n+2}$ en fonction de $u_{n+1}$ et $v_{n+1}$.
En déduire $u_{n+2}$ en fonction de $u_{n+1}$ et $u_n$.

4° Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad u_n = 10^n.f(n)$$

$f$ désignant la fonction étudiée en I.
En déduire graphiquement, à l'aide de la courbe $C$, une valeur approchée du capital disponible le $1^{er}$ janvier 1991.
Interpréter le résultat du I.3°