<u>Concours National des E.S.C.A.E.</u>

Option économique

Concours National d'admission 1983

MATHEMATIQUES I

Algèbre et analyse

Cette épreuve est composée de deux problèmes indépendants.

PROBLEME N° 1

A. On rappelle de l'ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ muni de l'addition usuelle des fonctions et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
On considère les fonctions f_1, f_2, f_3 définies sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ respectivement par :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x\ln\left[(x+1)^2\right] \\ f_2(x) &= \ln\left[(x+1)^2\right] \\ f_3(x) &= x \end{aligned}$$

où ln désigne le logarithme népérien.
Soit E l'ensemble des combinaisons linéaires, à coefficients réels, des 3 fonctions f_1, f_2, f_3.

1° Justifier la structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de E, puis montrer que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ en est une base.

2° On considère la fonction :

$$h \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{-1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 5(x+1)\ln\left[(x+1)^2\right] - 10 \end{array} \right.$$

Montrer que h est un élément de E, et donner ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

3° a) On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que A est inversible et calculer son inverse A^{-1}.

b) En déduire la solution du système

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcr} 2a + 2b + 3c & = & 5 \\ a + b + 4c & = & 5 \\ a - 2b + c & = & -10 \end{array} \right.$$

où (a, b, c) désignent trois inconnues réelles.

c) Montrer que le triplet (a, b, c), solution du système (S), peut s'interpréter comme le triplet des coordonnées de la fonction h dans une base $\mathcal{B}' = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ de E. (On déterminera φ_1, φ_2, φ_3 et on montrera que $\mathcal{B}'$ est une base de E).

B. 1° Etudier les variations de la fonction :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{-1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 10\ln|x+1| \end{array} \right.$$

2° Etudier les branches infinies de la courbe (C_g) représentative de g.

3° Montrer que la courbe (C_g) admet un axe de symétrie. Construire la courbe (C_g) dans un repère orthonormé du plan (unité graphique : 1 cm)/

4° Soit x un réel strictement positif.

a) Exprimer le réel C, en fonction de x, si la relation suivante est vérifiée :

$$g(x) = \ln[(0,001)C]$$

b) Calculer C à 10^{-2} près par défaut pour $x = 0,15$ et pour $x = 0,05$

c) Interpréter les résultats du 4° a) et 4° b), si C est un capital exprimé en francs.

C. On considère la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 5(x+1)\ln\left[(x+1)^2\right] - 10x & \text{si } x \neq -1 \\ 10 & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

1° Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

2° Etudier les variations de f.

3° Préciser les branches infinies de la courbe (C_f) représentative de f.
Déterminer la tangente à (C_f) au point $I(-1, 10)$.

4° a) Démontrer que l'équation $f(x) = m$, d'inconnue x strictement positive et de paramètre m strictement positif, admet une solution unique.

b) Déterminer x, élément de $\mathbb{R}_+^\times$, solution de l'équation, pour $m = 10$.

c) Donner une valeur approchée à 10^{-1} près par défaut de la solution $x_0 \in \mathbb{R}_+^\times$, de l'équation $f(x) = 5$.

5° Construire la courbe représentative de f dans un plan rapporté à repère orthogonal (unité en abscisse : 2 cm, unité en ordonnée : 0,5 cm).

6° Calculer l'intégrale

$$J(\alpha) = \int_\alpha^0 f(x)dx$$

où $\alpha \in]-1, 0[$.
Déterminer la limite de $J(\alpha)$ quand α tend vers 1. Interpréter graphiquement ce résultat.

PROBLEME N° 2

Les parties A, B, C sont indépendantes.

A. Le service " fabrication " d'une entreprise utilise deux ateliers A_1 et A_2. L'atelier A_1 élabore un produit semi-fini P_1 puis transporte chaque unité de P_1 dans l'atelier A_2 qui la transforme en une unité de produit fini P_2.
Le service " fabrication " produit mensuellement un nombre x d'unités du produit fini P_2 compris entre 500 et 2 000.
Les charges de ce service se composent de charges fixes qui s'élèvent mensuellement à 39 000 F et de charges variables qui sont actuellement de 84 F par unité de P_2 produite.

Souhaitant se réorganiser, le service " fabrication " envisage deux solutions :
1ère solution : Fermer l'atelier A_2 en livrant les unités de P_1 à un sous-traitant qui les transformerait en unité du produit fini P_2, pour un coût unitaire inférieur de 6 F à celui de l'atelier A_2. On admet que les charges mensuelles du service " fabrication " resteraient fixées à 39 000 F malgré la fermeture de A_2; il s'y ajouterait un montant mensuel forfaitaire de frais de transport fixé à 6 200 F.

2ième solution : Remplacer une partie des machines de l'atelier A_2 par d'autres plus performantes. Ceci conduirait à une diminution de 10 F des charges variables par unité de P_2 produite, mais aussi une augmentation des charges fixes mensuelles de 10 000 F.

1° Déterminer, selon la valeur de x, nombre d'unités de P_2 produites, la solution minimisant les charges globales du service " fabrication ".

2° On suppose désormais que le service " fabrication " a adopté la solution 2.

a) On note respectivement $f_1(x)$ et $f_2(x)$ les prix de revient unitaires de P_2, avant et après adoption de la solution 2, x désignant le nombre d'unités de P_2 produites.
Expliciter $f_1(x)$ et $f_2(x)$.
Déterminer la production à partir de laquelle la solution 2 est intéressante.
Etudier successivement et représenter graphiquement dans un même repère les fonctions f_1 et f_2.
Retrouver graphiquement le résultat précédent.

b) Le prix de vente d'une unité du produit P_2 est 144 F. Dans quelle mesure la production minimale que le service " fabrication " devait nécessairement avoir pour être rentable, en fonction de ce prix de vente et de sa structure, sera-t-elle modifiée par l'adoption de la solution 2 ?
Retrouver ce résultat à l'aide du graphique établi en 2° a).

c) Si la production future, après adoption du projet 2, dépasse 1 800 unités, les charges variables par unité de P_2 produite sont modifiées et définies par :

74 F pour les 1 800 premières
[74+0,1(x-1800)] F pour les suivantes

Déterminer alors le bénéfice global $b(x)$ pour une production mensuelle x supérieure à 1 800 unités. (On admet que le prix de vente est maintenu à 144 F pour chacune des x unités produites)
En déduire la production que l'entreprise devra viser pour obtenir un bénéfice maximal de l'on déterminera.

B. Le service " transport " de l'entreprise procède à l'expédition du produit P_2 et utilise pour cela des caisses achetées à un fabricant. Ce dernier commercialise deux types de caisses C_1 et C_2. Pour réaliser une caisse de type C_1, il faut 20 kg de bois, 20 clous, 10 vis et 1 h 30 de main-d'oeuvre; pour réaliser une caisse de type C_2, il faut 10 kg de bois, 40 clous, 10 vis et 1 h de main-d'oeuvre.
Le fabricant dispose de 7,5 tonnes de bois, de 9 000 clous, de 3 000 vis et de 360 h de main-d'oeuvre par semaine. Les caisses C_1 et C_2 sont vendues respectivement 125 F et 100 F.

1° Déterminer le programme de fabrication qui procure un bénéfice maximal.

2° Même question, si la quantité de bois disponible par semaine n'est que de 3,6 tonnes.

C. Les différents services de l'entreprise reçoivent des prestations des autres services.
Le service " administratif " a travaillé 10 000 heures dont 300 h pour le service " fabrication " et 2 520 h pour le service " transport ".
Le service " fabrication " a travaillé 9 000 h dont 400 h pour le service " administratif " et 280 h pour le service " transport ".
Le service " transport " a travaillé 8 960 h dont 800 h pour le service " administratif " et 600 h pour le service " fabrication ".
Les dépenses des services " administratifs ", " fabrication ", " transport ", s'élèvent respectivement à 376 000 F, 504 900 F et 206 360 F, auxquelles s'ajoutent pour chacun d'eux les coûts des prestations reçues des deux autres services.
Déterminer les coûts horaires de chaque service