Concours National des E.S.C.A.E.

Option générale et technologique

Concours National d'admission 1984

MATHEMATIQUES I

Algèbre et analyse

L'épreuve est constituée d'un exercice et d'un problème

EXERCICE

On considère l'espace vectoriel E_n des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, où n est un entier naturel fixé supérieur ou égal à 2.
On note : 0 la matrice nulle de E_n
I la matrice unité de E_n
Soit A un élément de E_n tel que : $A \neq 0$ et $A \times A = 0$.

1. α et β étant deux réels, montrer que :

$$\alpha A + \beta I = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

2. Soit E'_n le sous-espace vectoriel de E_n engendré par (A, I).
   Quelle est la dimension de E'_n ?
   Montrer que E'_n est stable par multiplication des matrices.

3. On pose : $B = A + I$.
   (a) Déterminer un élément B' de E'_n vérifiant $B' \times B' = I$
   Que peut-on dire de B' relativement à B ?
   (b) Calculer B^2 et B^3 en fonction de A et I.
   (c) p étant un entier strictement positif, calculer B^p en fonction de p, A et I.
   En déduire $S_p = B + B^2 + \cdots + B^p$ en fonction de p, A et I.

4. *Application numérique* : On suppose $n = 3$.
   Soit $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer $(B - I)^2$.
   (b) Déterminer la matrice inverse de B.
   (c) Calculer en fonction de p, $(p \in \mathbb{N}^\times)$:

$$S_p = B + B^2 + \cdots + B^p$$

5. Soit u une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même, vérifiant : $u \neq 0$ et $u \circ u = 0$
   0 désigne l'application nulle de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même.
   (a) Vérifier l'inclusion : $\text{Im}(u) \subset \ker(u)$.
   (b) Déterminer les dimensions de $\text{Im}(u)$ et $\ker(u)$.

6. Soit v l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même de matrice $B - I$ sur la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.
   B désigne la matrice donnée à la question 4.
   Donner une base de $\mathrm{Im}(v)$ et de $\ker(v)$.
   En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ sur laquelle la matrice de v s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

PROBLEME

Dans tout le problème, on désigne par E l'ensemble : $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

I. On considère la fonction
$$f : \begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{\ln x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \end{array}$$
Le symbole ln désigne le logarithme népérien.
On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f, dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Unités : 8 cm sur l'axe $(O, \overrightarrow{i})$
2 cm sur l'axe $(O, \overrightarrow{j})$

1° a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur E.
b) Donner le tableau de variation de f.
c) Donner les coordonnées du point d'inflexion de $\mathcal{C}$ et une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en ce point.
d) Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

2° a) Montrer que pour tout x appartenant à $[\frac{1}{2}, 1]$, on a :

$$2(x-1) \leqslant \ln x$$

b) En déduire que pour tout α appartenant à $[\frac{1}{2}, 1[$, on a :

$$\int_{1/2}^{\alpha} f(x)dx \leqslant \int_{1/2}^{\alpha} \frac{dx}{(x-1)}$$

II. On pose $F(x) = \int_{x}^{x^2} f(t)dt$.

1° a) Montrer que F est définie sur E. Préciser le signe de F.
b) Démontrer que F est dérivable sur E.
Calculer $F'(x)$ pour x non nul. En déduire les variations de F.
Préciser $F'(0)$.

2° a) Démontrer que pour tout x strictement positif, on a :

$$F(x) \geqslant \frac{x(x-1)}{2\ln x}.$$

b) En dédure la limite de F en $+\infty$ et la nature de la branche infinie de la courbe représentative Γ de F.

3° On se propose de montrer que F admet une limite en 1.

a) Soit φ la fonction : $\begin{array}{ccl} [\frac{1}{2},4] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } t=1 \\ \dfrac{t-1}{\ln t} & \text{si } t \neq 1 \end{cases} \end{array}$

Montrer que φ est continue sur $[\frac{1}{2},4]$ et justifier l'existence d'un réel M tel que pour tout t élément de $[\frac{1}{2},4]$, on ait :

$$\varphi(t) \leqslant M.$$

b) Soit ψ : $\begin{array}{ccl} [\frac{1}{2},4] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (t-1)^2-(t-1)+\ln t \end{array}$

Prouver que la fonction ψ est positive ou nulle.

En déduire que pour tout t élément de $[\frac{1}{2},1[\cup]1,4]$, on a :

$$\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{(t-1)} \leqslant \varphi(t)$$

On rappelle que pour tout t de $\mathbb{R}_+^{\times}$, on a : $\ln t \leqslant t-1$.

c) Montrer que pour tout t élément de $[\frac{1}{\sqrt{2}},1]$, on a :

$$0 \leqslant \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1}\right) dt \leqslant Mx(1-x)$$

puis que pour tout x élément de $[1,2]$, on a :

$$0 \leqslant \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1}\right) dt \leqslant Mx(x-1)$$

En déduire que :

$$\lim_{x\to 1} \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\ln t} - \frac{1}{t-1}\right) dt = 0$$

d) Prouver alors que F admet $\ln 2$ pour limite en 1.

e) Calculer la limite de F' en 1. En déduire que F admet un prolongement G dérivable en 1.

4° Donner l'allure de la courbe représentant la fonction prolongée G.

III. Pour n entier naturel non nul, on considère la fonction :

$$f_n : \begin{array}{ccl} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ \dfrac{1}{(\ln x)^n} & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \end{array}$$

1° a) Etudier la continuité de f_n sur E.

b) Etudier les variations de f_n (On discutera suivant la parité de n).

c) On note x_n l'abscisse du point d'inflexion de la courbe représentative de f_n.
Prouver que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

2° a) Justifier l'existence de l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{1/e} f_n(x)dx$$

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul :

$$|I_n| \leqslant \frac{1}{e}.$$

c) Pour n strictement supérieur à 1, exprimer I_n en fonction de n et de I_{n-1}.

d) Déduire des deux questions précédentes que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ converge vers 0.