Concours National des E.S.C.A.E.

Option économique

Concours National d'admission 1986

MATHEMATIQUES I

Algèbre et analyse

Cette épreuve est composée de deux problèmes indépendants.

PROBLEME I

I. On considère la fonction numérique f, de la variable réelle x, définie par :

$$f(x) = \ln\left|\frac{x-1}{2x}\right| - x$$

où ln désigne le logarithme népérien.

1° a) Déterminer l'ensemble de définition de f.

b) Etudier les variations de f.

c) Etudier les branches infinies de la courbe (C) représentative de f et préciser ses asymptotes. Etudier en particulier la position de la courbe (C) par rapport à son asymptote oblique.

2° Soit I le point de la courbe (C) d'abscisse $\frac{1}{2}$.

a) Donner une équation de la tangente à (C) en I.

b) Démontrer que I est centre de symétrie de (C).

c) Prouver que (C) présente en I un point d'inflexion.

3° Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0. Déterminer un entier naturel n tel que :

$$\frac{n}{10} \leqslant x_0 < \frac{n+1}{10}$$

4° Construire la courbe (C) et ses asymptotes dans un repère orthonormé du plan (unité graphique : 2 cm).

5° a) Calculer l'aire $a(\alpha)$, exprimer en cm^2, de la partie du plan limité par la courbe (C), la droite (D) d'équation :

$$y = -x - \ln 2$$

et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 2$, avec $1 < \alpha < 2$.

b) Quelle est la limite de $a(\alpha)$ lorsque α tend vers 1.

6° Soit g la restriction de f à l'intervalle $]0,1[$.

Montrer que g est une bijection de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}$. On ne cherchera pas à expliciter la fonction réciproque g^{-1}.

Justifier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de g^{-1} et calculer $(g^{-1})'\left(-\frac{1}{2} - \ln 2\right)$, valeur de la fonction dérivée de g^{-1} au point $-\frac{1}{2} - \ln 2$.

Construire la courbe représentative (Γ) de g^{-1} dans le repère précédent (cf. 4°)

II. Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ définie par :

$$u_n = f'(n) + 1$$

1° Exprimer u_n sous la forme $\dfrac{a}{n-1}+\dfrac{b}{n}$, où a et b désignent deux réels que l'on déterminera.

2° a) Calculer la somme :

$$S_n = u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

b) Quelle est la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$?

III. Soit A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

On note I la matrice unité d'ordre 3 :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose : $A^0 = I$, $A^1 = A$, et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $A^n = A^{n-1} \times A$.

1° Calculer A^2.

2° Montrer, en raisonnant par récurrence, que pour tout n élément de $\mathbb{N}$, A^n est de la forme :

$$A^n = \begin{pmatrix} u_n & v_n & w_n \\ v_n & u_n + w_n & v_n \\ w_n & v_n & u_n \end{pmatrix}$$

où (u_n), (v_n) et (w_n) sont des suites numériques vérifiant les relations :

$$u_0 = 1, \quad v_0 = 0, \quad w_0 = 0$$

et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \sqrt{2}v_n \\ v_{n+1} = \sqrt{2}u_n + v_n + \sqrt{2}w_n \\ w_{n+1} = \sqrt{2}v_n + w_n \end{cases}$$

3° On pose $d_n = u_n - w_n$. Montrer que pour tout entier naturel n :

$$d_{n+1} = d_n = 1$$

4° On pose $s_n = u_n + w_n$.

a) Exprimer la relation existant entre s_{n+1}, s_n et v_n.

b) Exprimer v_{n+2} en fonction de s_{n+1} et v_{n+1}.

c) En déduire, pour tout entier naturel n, la relation :

$$v_{n+2} = 2v_{n+1} + 3v_n$$

5° En utilisant 4° c), calculer v_n en fonction de n.
En déduire l'expression de s_n en fonction de n.

6° A l'aide des expressions de s_n et d_n obtenues, calculer u_n et w_n en fonction de n.

PROBLEME II

La partie C est indépendante des parties A et B.

Question préliminaire :

Un capital K est placé au taux annuel t (i.e. : si la somme placée le 1^{er} jour d'une année est S, le dernier jour de cette année, la somme a augmentée des intérêts égaux à $t.S$)
A la fin de chaque année, les intérêts s'ajoutent au capital (intérêts composés).
Soit C_n le capital disponible au bout de n années de placement.

a) Calculer C_{n+1} en fonction de C_n et de t.

b) Exprimer C_n en fonction de K et de t.

A. Une personne décide de se constituer un capital C en n année. Pour cela, elle veerse le 1^{er} janvier de chaque année une somme fixe K à une banque qui lui consent un taux d'intérêt annuel t.
On suppose dans cette partie que les intérêts rapportés par la somme placée sont exonérés d'impôts.

1° Calculer, en fonction de K et t la somme obtenue :

a) Au 31 décembre de la 1^{er} année de placement.

b) Au 31 décembre de la $2^{ème}$ année de placement.

2° Démontrer que le capital C obtenu au 31 décembre de la $n^{ième}$ année de placement est :

$$C = K(1+t).\frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

3° Application numérique : calculer le montant K du versement qu'il faudrait effectuer chaque année pour obtenir un capital C sachant que :

$$C = 500\ 000 \text{ F}, \qquad n = \ 8 \text{ ans}, \qquad t = 9\ \%{=}0{,}09$$

B. On suppose dans cette partie que la personne est obligée de payer un impôt sur les intérêts. A cette effet, et à la fin de chaque année, seuls 80 % des intérêts s'ajoutent au capital.
Calculer, dans ces conditions, avec les valeurs indiquées dans l'application numérique précédente, le nouveau montant K_1 du versement annuel. Quel a été le montant total des impôts payés pendant les 8 années de placement.

C. La personne décide d'investir son capital pour participer à la création d'une entreprise qui fabriquera des perceuses électriques.
Cette entreprise envisage de construire des perceuses de type A (professionnel) et de type B (grand public).
La vente d'une perceuse de type A rapporte un bénéfice de 250 F et celle d'une perceuse de type B un bénéfice de 100 F

1° Le fabricant des moteurs électriques équipant ces perceuses peut fournir chaque mois 200 moteurs au plus pour les perceuses de type A et 750 moteurs au plus pour les perceuses de type B.
Le temps d'assemblage d'une perceuse de type A est le triple du temps d'assemblage d'une perceuse de type B. En un mois, si l'on assemblait que des perceuses de type B, on disposerait d'un temps suffisant pour assembler 1 000 unités de ce type.
Les interrupteurs montés sur ces machines sont semblables sur les deux modèles et la quantité disponible de ces interrupteurs ne permet d'équiper qu'au plus 800 perceuses par mois.
Exprimer à l'aide d'inégalités les contraintes imposées mensuellement.
Représenter graphiquement le système des contraintes.
Dans l'hypothèse où toute la production mensuelle serait vendue, déterminer le programme d'assemblage procurant le bénéfice maximal.
Préciser alors le bénéfice.

2° L'entreprise désirant augmenter son bénéfice envisage de modifier une et une seule des trois contraintes d'approvisionnement (moteurs pour les perceuses de type A, moteurs pour les perceuses de type B, interrupteurs).
Quelle contrainte doit-elle choisir de modifier ? Dans quelle limite ? Quel est alors le bénéfice maximal réalisé ?