Concours National des E.S.C.A.E.

Option générale et économique

Concours National d'admission 1987

MATHEMATIQUES II

Statistiques et probabilités

EXERCICE

Un publicitaire décide de lancer une campagne sur le thème : " la publicité fait vendre ".
Dans ce but, il fait prélever, au hasard, 80 dossiers parmi ceux de ses clients.
Il obtient la statistique suivante dans laquelle :
X désigne le chiffre d'affaires exprimer en millions de francs.
Y désigne le budget publicité exprimé en centaines de milliers de francs.

classes de Y \ classes de X	[0;5]	]5;20]	]20;100]	]100;500]	]500;1 000]
[0;0,2]	30	1			
]0,2;0,8]	13	10	2		
]0,8;1]	5	4	4	1	
]1;3]		1	2	2	1
]3;10]				1	3

1. Calculer, à 0,01 près, au plus proche, le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.
   N.B. Les formules utilisées doivent être citées sur la copie Il est exigé de dresser un tableau de calculs indiquant toutes les valeurs ainsi que les sommes nécessaires à la détermination de ce coefficient

2. Dans cette question, on étudie le chiffre d'affaire des entreprises (variable X)

   (a) Construire la courbe de Gini de cette distribution sur la feuille de papier milimétré jointe au sujet.
   N.B. Cette courbe sera inscrite dans un carré de 20 cm de côté

   (b) Calculer l'indice de Gini à 0,01 près, au plus proche.

   (c) Estimer géométriquement le chiffre d'affaire médian et le chiffre d'affaire médial.

PROBLEME

Votre employeur vous a chargé de l'organisation d'un congrès et vous cherchez à prévoir, le plus précisément possible, le nombre de participants en fonction du nombre d'invitations que vous aurez adressées.

Partie I

Les renseignements que vous avez recueillis auprès de collègues sont résumés dans le tableau ci-dessous donnant la loi de probabilité estimée du pourcentage X de participants par rapport au nombre d'invités.

x_i	p_i
5	0,1
10	0,3
15	0,4
20	0,2

1. Déterminer le pourcentage moyen que l'on peut espérer.

2. Afin d'améliorer ces prévisions, vous réalisez un sondage auprès de 40 personnes choisies au hasard parmi les invités potentiels.
   Le nombre de participants à ce congrès sur les 40 personnes contactées définit une variable aléatoire C.

   (a) On se place dans le cas où $X = 5$ c'est-à-dire que la probabilité de participation est, *pour chaque invité*, estimée à $\dfrac{x_1}{100} = 0,05$
   Quelle est, dans cette condition, la loi de probabilité de C ?
   Calculer, en utilisant cette loi, la probabilité de l'évènement $[C = 6]$
   N.B. Cette probabilité sera arrondie, au plus proche, à 0,0001 près

   (b) Calculer, avec le même arrondi, la probabilité de ce même évènement pour chacune des trois autres valeurs de X.

   (c) Déduire des résultats obtenus en a et b la probabilité que, sur 40 personnes contactées, 6 exactement aient l'intention de participer à ce congrès.

3. Les 40 personnes que vous avez contactées vous ont répondu et 6 d'entres elles ont l'intention de participer à ce congrès, les autres déclinant l'invitation.

   (a) Quelle est la probabilité p'_1 de $[X = 5]$ sachant $[C = 6]$?
   N.B. Cette probabilité sera arrondie, au plus proche, à 0,001 près et sera calculée en utilisant les résultats arrondis obtenus aux questions précédentes

   (b) Calculer, comme indiqué dans le N.B. ci-dessus, les probabilités p'_2, p'_3 et p'_4 pour chacune des trois autres valeurs de X.
   On obtient ainsi la loi de probabilité corrigée de X.

4. Après cette correction, quel est le pourcentage moyen de participants que l'on peut maintenant espérer ?

5. Vous vous souvenez brusquement qu'il est parfois possible d'approcher une loi de probabilité par une loi de Poisson.
   Reprendre les questions 2. et 3. en admettant la validité de cette approximation dans chacun des quatre cas.
   N.B. Les réponses seront données avec les arrondis précisés dans ces questions.
   Quel est alors le pourcentage moyen de participants que l'on peut espérer ?
   Les conditions qui, d'après le cours, permettent de justifier l'emploi de cette approximation étaient-elles vérifiées dans chacun des quatre cas ?

Partie II

Compte-tenu de l'ordre de grandeur du nombre d'invitations que vous pensez adresser vous constatez que l'écart entre le pourcentage moyen de participants découlant des informations initialement recueillies et celui obtenu après correction à la suite du sondage effectué peut se traduire par une différence de près de cent personnes.
Vous décidez donc d'avoir une approche un peu plus scientifique du problème.
Grâce à la collaboration d'un de vos collègues du service informatique, vous procédez à une simulation en utilisant les statistiques disponibles portant sur des congrès similaires.

La distribution de la variable aléatoire X définie en I est alors la suivante :

x_i	p_i
[5;7]	0,01
]7;9]	0,04
]9;11]	0,10
]11;13]	0,17
]13;15]	0,25
]15;17]	0,23
]17;19]	0,12
]19;21]	0,06
]21;23]	0,02

et cette variable peut-être considérée comme continue.

1. (a) A l'aide du papier gausso-arithmétique joint au sujet, et en utilisant votre réponse, prouvez que cette distribution de X peut-être ajustée par une loi normale dont vous estimerez graphiquement les paramètres.
   On admet désormais que X suit la loi normale $\mathcal{N}(14,4;3,2)$
   N.B. Pour tous les calculs utilisant cette loi normale les valeurs nécessaires de la variable réduite associée à X seront arrondies, au plus proche, à 0,01 près et les probabilités seront données à 0,001 près en utilisant une table jointe au sujet

   (b) Calculer la probabilité $(X < 20)$ sachant $(X \geqslant 15)$.

2. Le nombre de participants au congrès définit une variable aléatoire discrète Y que l'on se propose d'étudier à partir de la loi de X.
   La correction de continuité conduit à remplacer Y par la variable continue $Z = \dfrac{N}{100}X$, où N désigne le nombre d'invitations.
   Vous envisagez N=5 000.

   (a) Quelles sont les probabilités des deux évènements $[650 \leqslant Y \leqslant 800]$ et $[Y > 1000]$?

   (b) Les frais d'utilisations des locaux pendant la durée du congrès s'élèvent à 100 000 F.
   Si vous demandez une participation forfaitaire de 160 F par congressiste, quelle est la probabilité d'avoir un déficit ?

   (c) Quel est le plus grand entier naturel n_0 tel que la probabilité de l'évènement $[Y < n_0]$ soit au plus de 0,015
   En déduire le montant minimum de participation à demander afin que la probabilité d'avoir un déficit soit au plus de 0,015 ?
   N.B. Ce montant sera arrondi à la dizaine de francs supérieur.

3. La somme obtenue à la question précédente vous paraissant trop élevée, vous envisagez de conserver le montant initial de 160 F et d'augmenter le nombre d'invitations.

   (a) Quelle est alors la valeur minimum n_0 à donner à N pour que la probabilité de déficit soit au plus 0,015 ?

   (b) Quelle est, pour cette valeur n_0, la probabilité que le nombre de participants dépasse 1 200 ?

4. Pour diverses raisons, il vous est demandé de fixé le montant des participation à 200 F.
   Vous apprenez également que la grande salle dans laquelle se tiendront les réunions plénières ne peut contenir plus de 1 500 congressistes.
   Dans ces conditions, déterminer le plus petit entier naturel n_1 et le plus grand entier naturel n_2 entre lesquels vous devez choisir N afin que la probabilité de déficit soit au plus 0,015 et que la probabilité de ne pouvoir réunir tous les congressistes dans la grande salle ne dépasse pas non plus 0, 015 ?