Concours National des E.S.C.A.E.

Option économique

Concours National d'admission 1988

MATHEMATIQUES I

Algèbre et analyse

Cette épreuve est constituée de deux problèmes indépendants

PROBLEME I

On se donne les matrices :

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

et on pose :

$$A^0 = I, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad A^{n+1} = A^n.A, \quad S_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n-1} A^k$$

I. 1° Calculer $L.M$ et $M.L$

2° Calculer L^2 et M^2. En déduire L^n et M^n, $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$

3° En remarquant que $A = L - M$, démontrer que $A^n = 3^{n-1}L - (-3)^{n-1}M$, $\quad n \in \mathbb{N}^\times$.

4° Exprimer S_n en fonction de I, L, M et n.

5° On pose $S = I - A$.

a) Démontrer que S est inversible et calculer S^{-1}.

b) En déduire que : $S_n = S^{-1}(I - A^n)$.

II. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} x_n = \lambda x_{n-1} + \alpha n^2, & n \in \mathbb{N}^\times \\ x_0 \text{ donné} \end{cases}$$

où λ est un réel différent de 1 et α un réel non nul.

1° Démontrer qu'il existe une suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est un polynôme de degré 2 vérifiant :

$$Q_n = \lambda Q_{n-1} + \alpha n^2, \quad n \in \mathbb{N}^\times$$

(On posera $Q_n = an^2 + bn + c$ et on déterminera a, b et c en fonction de λ et α).

2° On pose : $\forall n \in \mathbb{N} : y_n = x_n - Q_n$.
Démontrer que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
En déduire l'expression de y_n, puis de x_n en fonction de n, λ, α et x_0.

III. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant trois suites de nombres réels, on pose pour tout entier naturel n :

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

On considère alors l'équation matricielle : $\forall n \in \mathbb{N}^\times : X_n = AX_{n-1} + B$

où A est la matrice carrée d'ordre 3 définie au début du problème et $B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$ une matrice colonne donnée.

1° On pose $X_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$

a) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} : X_n = A^n X_0 + S_n B$
En déduire, en utilisant les résultats du I, les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

b) Déterminer le terme général de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels définie par :

$$\begin{cases} x_n = a x_{n-1} + b, \quad n \in \mathbb{N}^\times \\ x_0 \text{ donné} \end{cases}$$

où $a \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $b \in \mathbb{R}$
Cette formule est-elle comparable à celle obtenue précédemment ?

2° On pose $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2n^2 \\ n^2 \\ -2n^2 \end{pmatrix}$ et on considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_n = u_n + v_n + w_n \\ b_n = 2u_n - v_n - w_n \\ c_n = u_n - 2v_n + w_n \end{cases}$$

où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont les trois suites définies au début du III.

a) Démontrer que $a_n = n^2, \quad n \in \mathbb{N}$

b) Etablir une relation de récurrence entre b_n et b_{n-1}.
En déduire, en utilisant les résultats du II. l'expression de b_n en fonction de n.

c) Etablir de même une relation de récurrence entre c_n et c_{n-1}. En déduire l'expression de c_n en fonction de n.

d) En déduire l'expression de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

PROBLEME II

I. On considère la fonction : $h : \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x}{x} \end{array}$

1° Etudier les variations de h.

2° Etudier les branches infinies de (C) courbe représentative de h.

3° a) n étant un entier supérieur ou égal à 2, justifier l'existence et l'unicité d'un réel δ_n appartenant à $]0, 1[$ tel que :

$$h(\delta_n) = h(n)$$

b) Déterminer les entiers naturels p et q tels que : $\dfrac{p}{100} \leqslant \delta_2 < \dfrac{p+1}{100} \qquad \dfrac{q}{100} \leqslant \delta_3 < \dfrac{q+1}{100}$.

II. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère la fonction $g_n : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (n - x)e^x - x \end{array}$

1° Etudier les variations de g_n.

2° a) En déduire l'existence d'un unique réel α_n vérifiant : $\alpha_n > 0, \quad g_n(\alpha_n) = 0$.

b) Démontrer que : $n - 1 < \alpha_n < n$.

c) On pose alors : $\alpha_n = n - \delta_n$, avec $\delta_n \in]0, 1[$.
Vérifier que : $h(\delta_n) = h(n)$ où h est la fonction définie au I.
En déduire à 10^{-2} près la valeur de α_2 et α_3.

d) Trouver alors le signe de $g_n(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$.

III. n désignant toujours un entier naturel supérieur ou égal à 2, on considère la fonction f_n définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x^n}{e^x - 1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On note (C_n) la courbe représentative de f_n.

A

1° Etudier la continuité de f_n.

2° Etudier la dérivabilité de f_n. Préciser la tangente à (C_n) à l'origine.

3° Déterminer la nature des branches infinies de (C_n).

4° Etudier les variations de f_n. On démontrera qu e:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad f_n'(x) = \frac{x^{n-1}}{e^x - 1} . g_n(x),$$

où g_n désigne la fonction étudiée au II.
Démontrer que $f_n(\alpha_n) = (n - \alpha_n)\alpha_n^{n-1}$

5° Etudier pour $m > n$, la position relative de (C_n) et (C_m).

6° Construire les courbes (C_2) et (C_3) dans un repère orthogonal du plan (unité en abscisses : 2 cm, unité en ordonnées : 10 cm)

B

1° Justifier l'existence de la fonction F définie pour $x \geqslant a$ par : $F(x) = \int\limits_a^x f_2(t)dt$ où $a \in \mathbb{R}_+^\times$.

2° Démontrer que F est strictement croissante.

3° a) Démontrer que pour tout $t \geqslant a$, on a :$\dfrac{1}{e^t - 1} \leqslant \dfrac{1}{e^a - 1}$.

b) Calculer l'intégrale : $\int\limits_a^x t^2 e^{-t} dt$.

c) En remarquant que : $\dfrac{1}{e^t - 1} = e^{-t}\left(1 + \dfrac{1}{e^t - 1}\right)$ déduire que : $F(x) \leqslant \dfrac{a^2 + 2a + 2}{e^a - 1}$

d) Prouver alors que l'intégrale impropre $\int\limits_a^{+\infty} f_2(t)dt$ est convergente.

e) En déduire la convergence de $\int\limits_0^{+\infty} f_2(t)dt$