Concours National des E.S.C.A.E.

Option technologique

Concours National d'admission 1988

MATHEMATIQUES I

EXERCICE 1

Le tableau suivant présente la répartition de l'impôt sur le revenu en France en 1980

Impôt payé en F	Nombre de contribuables (en millions)
[0;1 000[	2,5
[1 000;2 000[	2,4
[2 000;5 000[	4,9
[5 000;10 000[	2,8
[10 000;15 000[	1
[15 000;20 000[	0,4
[20 000;50 000[	0,7
[50 000;200 000]	0,3

On appelera c_i les centres des classes. On présentera les calculs sous forme de tableau.

1. Calculer :

   (a) l'impôt moyen $\overline{c}$

   (b) l'impôt médian M_e

   (c) l'impôt médial M_l

   On donnera les valeurs au centime près.

2. Construire la courbe de concentration ou courbe de Gini sur la feuille de papier milimétré fournie.
   Les pourcentages nécessaires à la construction seront donnés à 10^{-1} près au plus proche, la courbe sera inscrite dans un carré de 10 cm de côté.

3. Calculer la valeur approchée à 10^{-2} près au plus proche de l'indice de concentration ou indice de Gini.

EXERCICE 2

Une société assure l'exploitation d'un puit de pétrole à l'instant $t = 0$ jusqu'à l'instant où elle décide l'arrêt de l'exploitation. La quantité de pétrole est mesurée en milliers de barils. L'unité de temps est l'année.
On suppose que le flux de pétrole extrait est une fonction f de t.
Durant la période de lancement ($0 \leqslant t < 2$), f est donnée par la formule $f(t) = 3e^{0,5t}$.
Durant la période de développement de l'exploitation ($2 \leqslant t < 5$), f est donnée par la formule $f(t) = at + b$, a et b étant des constantes réelles.
Durant la période d'exploitation régulière ($5 \leqslant t < 17$), f est une constante c.
Enfin, durant la période d'épuisement ($17 \leqslant t \leqslant 20$), f est donnée par la formule $f(t) = 7,5e^{-t+18}$.

1. On suppose que f est continue sur $[0, 20]$. Déterminer a, b, c.

2. Etudier la dérivabilité de f.

3. Construire la courbe représentative de f dans un repère orthonormé sur la feuille de papier milimétré fournie.

4. Calculer la quantité de pétrole extraite pendant la durée de l'exploitation, c'est-à-dire $\int\limits_0^{20} f(t)dt$. En donner une valeur approchée à 10^{-3} près au plus proche.

EXERCICE 3

1. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 12 \\ -1 & -1 & 16 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 25 & -45 & 60 \\ 7 & 7 & -28 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

   (a) Calculer PQ.
   En déduire que P est inversible. Donner l'expression de P^{-1}.

   (b) Calculer $D = P^{-1}AP$.

   (c) Calculer D^n, pour $n \in \mathbb{N}^{\times}$

   (d) Montrer, par récurrence, que, pour $n \in \mathbb{N}^{\times}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

   (e) En déduire A^n.

2. Un point lumineux est susceptible d'occuper 3 positions différentes U, V, W. Il change de position à chaque seconde. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le point lumineux se trouve en V.
On suppose que :

   - Si à l'instant n, le point lumineux se trouve en U, la probabilité qu'à l'instant $n + 1$ il se trouve en V est $3/4$ et la probabilité qu'à l'instant $n + 1$, il se trouve en W est $1/4$
   - Si à l'instant n, le point lumineux se trouve en V, la probabilité qu'à l'instant $n + 1$ il se trouve en U est $3/4$ et la probabilité qu'à l'instant $n + 1$, il se trouve en W est $1/4$
   - Si à l'instant n, le point lumineux se trouve en W, à l'instant $n + 1$ il se trouve en V

   On note : U_n l'évènement " le point lumineux est en U à l'instant n "
   V_n l'évènement " le point lumineux est en V à l'instant n "
   W_n l'évènement " le point lumineux est en W à l'instant n "
   $p_n = p(U_n)$, $q_n = p(V_n)$, $r_n = p(W_n)$

   On a donc $p_0 = 0$, $q_0 = 1$, $r_0 = 0$

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$ où $B = \dfrac{1}{4}A$ (A étant la matrice donnée en 1.

   (b) Calculer p_n, q_n, r_n.

   (c) Donner les limites p, q, r des suites (p_n), (q_n), (r_n)