ESCAE 1989 Mathématiques I

Option économique

Algèbre et analyse

Durée : 4 heures.

EXERCICE (sur 4 points)

Le plan étant rapporté à un repère orthonormal, on considère les points $\Omega\ (40;35)$, $A\ (40;60)$, $B\ (50,5;57,5)$, C $(68;45)$ et $D\ (75;35)$.

1. Ecrire le système des contraintes reliant les variables x et y tel que le régionnement du plan associé à ce système donne le polygone $\Omega ABCD$.
2. x et y étant liées par les contraintes précédentes, on veut maximiser la fonction b définie par $b(x,y) = x+2y$.
   (a) Déterminer la solution optimale en précisant la valeur correspondante b_0 de b.
   (b) Reprendre la question 2a en supposant x et y entiers naturels.
3. x restant supérieur ou égal à 40 et y supérieur ou égal à 35, on désire augmenter la valeur de b en supprimant l'une des contraintes.
   Quelle est la contrainte que l'on doit supprimer pour obtenir la valeur de b la plus élevée ?

PROBLEME (sur 16 points)

I.

On donne les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer J^2 et J^3 . En déduire J^k, $k \geqslant 3$.

b) On pose $T = 2I + J$.Donner pour$n \in \mathbb{N}$ l'expression de T^n.

c) On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}\,, \quad \begin{cases} a_n = 2a_{n-1} \\ b_n = 2a_{n-1} + 2b_{n-1} \\ c_n = b_{n-1} + 2c_{n-1} \end{cases}$$

Donner en utilisant les résultats de la question **I.**b) les expressions de a_n, b_n et c_n en fonction de a_1, b_1, c_1 et n.

II.

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par : $f(x) = 1 - 8x^2e^{2x-1}$.
On note (C) la courbe représentative de f.

PARTIE A

1. Etudier les branches infinies de (C)

2. Calculer $f'(x)$ et en déduire les variations de f.

3. Calculer $f''(x)$. Démontrer que (C) présente deux points d'inflexion dont on donnera les coordonnées.

4. Construire la courbe (C) dans un repère orthonormal du plan : unité graphique : 10cm.
   On se limitera à l'intervalle $[-2,5;0]$ en abscisse.

5. (a) Calculer l'aire A_λ comprise entre la courbe (C), la droite d'équation $y = 1$ et les verticales $x = 0$ et $x = \lambda$ (λ<0).

   (b) En déduire la convergence et la valeur de l'intégrale impropre : $\int\limits_{-\infty}^{0} x^2 e^{2x-1} dx$.

PARTIE B

1. $f^{(n)}$ désignant la dérivée d'ordre n de la fonction f démontrer par récurrence sur $n\mathbb{N}^\times$ que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = -8P_n(x)\, e^{2x-1}$$

   où P_n désigne un polynôme vérifiant la relation : $P_n(x) = P'_{n-1}(x) + 2P_{n-1}(x)$.

2. Démontrer que P_n est de degré 2 et qu'il existe trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) = a_n x^2 + b_n x + c_n$$

   et vérifiant le système de la question **I**

3. En déduire l'expression de $f^{(n)}(x)$.

PARTIE C

1. (a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution a.

   (b) Déterminer l'entier naturel p tel que : $\dfrac{p}{100} \leqslant a < \dfrac{p+1}{100}$.

2. On considère la fonction g définie sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{2} + \frac{x - \frac{1}{2}}{f(x) + 1}.$$

   (a) Justifier l'existence de g.

   (b) On considère la fonction h définie sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ par :

$$h(x) = f(x) + 1 - \left(x - \frac{1}{2}\right) f'(x).$$

   Etudier les variations de h . En déduire le signe de $h(x)$.

   (c) Démontrer que $g'(x) = \dfrac{h(x)}{(f(x)+1)^2}$.

   (d) En déduire que g est croissante.

3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} = g\left(u_n\right), \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 0 \end{array}\right.$

   (a) Calculer à 10^{-2} près u_1 ,u_2 et u_3 .

   (b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leqslant u_n \leqslant 0,4$.

   (c) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   (d) En déduire que la suite est convergente vers une limite appartenant à $\left[0, \dfrac{1}{2}\right[$.

4. Démontrer que la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est a solution de l'équation : $f(x) = 0$.

5. On considère les points E et M_0 de (C), courbe représentative de f , d'abscisses respectives $\dfrac{1}{2}$ et $x_0$avec $x_0 \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right[$.

   (a) Ecrire une équation de la droite (D_0) passant par E et M_0.

   (b) Soit N_1 le point d'intersection de (D_0) et de l'axe des abscisses. Démontrer que l'abscisse du point N_1 est $x_1 = g(x_0)$.

   (c) Démontrer que la corde M_0E est située au–dessous de la courbe (C).

   (d) Construire avec précision la courbe (C) dans un repère orthogonal du plan : unité en abscisse : 20cm – unité en ordonnée : 10cm. On se limitera à l'intervalle $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ en abscisse.

   (e) En déduire une interprétation géométrique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en constatant ainsi que l'on obtient une suite de valeurs approchées par défaut de a, solution de l'équation : $f(x) = 0$.