Concours National des E.S.C.A.E.

Option générale prime et économique

Concours National d'admission 1989

MATHEMATIQUES II

Statistiques et probabilités

EXERCICE

Une entreprise de vente par correspondance reçoit chaque jour une énorme quantité de courrier, dont une grande partie de commandes à honorer.
Pour faciliter le planning d'éxécution des commandes (vérification, recherche des articles en stock, facturation, etc.), la direction cherche un moyen de déterminer aussitôt que possible le volume des commandes. Elle a envisagé une liaison entre le poids du courrier reçu chaque jour et le nombre correspondant de commandes. Une étude effectuée pendant 12 jours a donné les résultats suivants :

n° de la journée t_i	poids du courrier (en 100 kg) x_i	nombre de commandes (en 1000) y_i
1	0,9	7,5
2	2,1	14,2
3	1,2	7,6
4	2,5	16,2
5	2,9	18,5
6	1,8	13,5
7	1,9	12,2
8	3,6	24,1
9	2,0	12,9
10	3,4	20,4
11	2,4	17,1
12	1,7	12,8

1. Représenter le nuage des points $M_i(x_i, y_i)$ sur la feuille de papier milimétré jointe au sujet :

   Axe des abscisses : $\begin{cases} \text{origine en } 0 \\ \text{unité : 1 cm pour 20 kg} \end{cases}$ Axe des ordonnées : $\begin{cases} \text{origine en } 0 \\ \text{unité : 1 cm pour 1000 commandes} \end{cases}$

2. Former le tableau des calculs nécessaires à la détermination du coefficient de corrélation linéaire entre x et y. Calculer ce coefficient à 0,1 près au plus proche.

3. Déterminer l'équation $y = ax + b$ de la droite de régression (D) de y en x.
   Les coefficients a et b seront arrondis à 0,01 près au plus proche.
   Tracer cette droite sur le graphique du 1°

4. (a) Calculer, à 0,01 près au plus proche, la valeur de $z_i = ax_i + b$ pour $1 \leqslant i \leqslant 12$.

   (b) En déduire la valeur de la somme : $S = \sum_{i=1}^{12} (y_i - z_i)^2$
   Que représente cette somme S ?

(c) Un statisticien affirme que si, un jour donné, y_0 est l'estimation à partir de la droite (D) du nombre de milliers de commandes correspondant à un poids observé (en 100 kg) de x_0, alors la probabilité que la valeur réelle du nombre de milliers de commandes de ce jour se situe dans l'intervalle :

$$[y_0 - 2,228\alpha, y_0 + 2,228\alpha] \text{ où } \alpha = \sqrt{\frac{S}{10}}\sqrt{1 + \frac{1}{12}\frac{(x_0 - \overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{12}(x_i - \overline{x})^2}}$$

est égale à 0,95.
Déterminer cet intervalle pour $x_0 = 3$.
La valeur estimée y_0 et les bornes de l'intervalle seront arrondies à 0,01 près au plus proche.

PROBLEME

Les questions de ce problème sont dans une large mesure indépendantes. Les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 0,0001 près le plus proche

1re PARTIE

Une agence de location de voitures proposes à sa clientèle 3 catégories de voitures : A, B et C. Elle a constaté que, dans une journée, 40 % des demandes de location concernent une voiture de la catégorie A, 50 % une voiture de la catégorie B et 10 % une voiture de la catégorie C.
Les demandes de location d'une voiture sont supposées indépendantes les unes des autres.

I. **Le nombre de voitures de la catégorie A demandées par jour définit une variable aléatoire** X

1° Un jour donné, l'agence reçoit 12 demandes de location d'une voiture.

a) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ?
Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X.

b) Calculer la probabilité des évènements :

- Le nombre de demandes de voitures de la catégorie A est égal à 7
- Le nombre de demandes de voitures de la catégorie A est au moins égal à 5 et au plus égal à 7.

c) Calculer la probabilité que, sur les 12 voitures demandées, il y en ait 6 de la catégorie A, 5 de la catégorie B et 1 de la catégorie C.

2° Un autre jour, l'agence ne peut disposer que de 6 voitures de la catégorie A, 4 de la catégorie B et 1 de la catégorie C.
Calculer la probabilité que, ce jour-là, elle puisse satisfaire une demande totale de 8 voitures, si on admet qu'aucun client éventuel ne veut modifier son choix initial.

II. Chaque jour, l'agence note, dans l'ordre, toutes les demandes de voitures des différentes catégories.
On appelle série de longueur l toute succession de location de l voitures de la même catégorie.
Soit S_1 la variable aléatoire définie par la longueur de la première série, S_2 celle définie par la longueur de la seconde série, S_3 celle définie par la longueur de la troisième série, etc.
Par exemple, si un jour l'agence enregistre successivement les demandes : AABBBCAC...., alors S_1 prend la valeur 2, S_2 prend la valeur 3, S_3 prend le valeur 1 et S_4 prend la valeur 1.
Un jour, l'agence a reçu n demandes de location d'une voiture.

1° Calculer la probabilité que la première série soit formée de A et qu'elle ait pour longueur 2 si :

a) $n = 2$

b) $n > 2$

2° On suppose $n > 3$. Calculer la probabilité des évènements :

a) $[S_1 = 1]$

b) $[S_1 = 1] \cap [S_2 = 1] \cap [S_3 = 1]$

3° On suppose $n = 3$.

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire S_1.

b) Déterminer la loi conjointe du couple (S_1, S_2)
Les variables aléatoires S_1 et S_2 sont-elles indépendantes ?

III. L'agence a également remarqué que, chaque jour, 70 % des demandes de location d'une voiture de la catégorie A, 78 % de celles d'une voiture de la catégorie B et 90 % de celles d'une voiture de la catégorie C sont effectuées par des sociétés pour leur personnel.

1° Calculer la probabilité qu'une demande de location d'une voiture soit faite par une société

2° Une demande de location d'une voiture, indifféremment de catégorie B ou C arrive à l'agence. Calculer la probabilité qu'elle soit faite par une société.

3° Calculer la probabilité qu'une demande de location d'une voiture de la catégorie A soit faite par une société.

4° Deux demandes de location d'une voiture arrivent à l'agence.
On désigne par Y la variable aléatoire définie par le nombre de demandes d'une voiture de catégorie A et par Z celle définie par le nombre de demandes émanant de sociétés.

a) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire Y ?

b) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire Z ?

c) Calculer la probabilité de l'évènement $[Y = 1] \cap [Z = 1]$.
Les variables Y et Z sont-elles indépendantes ?

2^e PARTIE

La société, dont l'agence précédente est concessionnaire, a calculé que la probabilité qu'une de ses voitures louées ait un accident dans une journée est 0,0004 (La probabilité qu'une voiture louée ait plus d'un accident par jour est supposés nulle).
Les accidents sont supposés indépendants les uns des autres.
Chaque jour, 10 000 voitures de la société sont en circulation.

1. Soit N la variable aléatoire définie par le nombre de voitures de location de la société ayant un accident dans une journée.

a) Définir la loi de probabilité de la variable aléatoire N
Calculer l'espérance mathématique et la variance de N.

b) Montrer que la loi de N peut-être approchée par une loi de Poisson.

c) A l'aide de cette approximation, calculer la probabilité des évènements suivants :

- Le nombre des accidents en une journé est égal à 4
- Le nombre des accidents en une journée est au plus égal à 5 sachant qu'il est au moins égal à 2.

d) A l'aide de cette approximation, déterminer le plus petit entier k tel que :

$$P(N > k) \leqslant 0,01$$

2. La société a noté le coût de réparation de chaque voiture accidentée. Elle a obtenu les résultats suivants :

Coût de réparation d'une voiture accidentée (en francs) classes $]C_{i-1}, C_i]$	Pourcentages cumulés croissants du nombre de voitures dont le coût de réparation est $\leqslant$ à C_i
au plus 2 000	3
]2 000;3 000]	6
]3 000;4 000]	18
]4 000;5 000]	29
]5 000;6 000]	52
]6 000;7 000]	67
]7 000;8 000]	84
]8 000;9 000]	93
]9 000;10 000]	98
plus de 10 000	100

a) Montrer, à l'aide du papier gausso-arithmétique joint au sujet, que cette distribution statistique peut-être ajustée par une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$ dont on déterminera graphiquement les paramètres m et σ.

b) On note C la variable aléatoire définie par le coût de réparation (en francs) d'une voiture de location accidentée et on admet désormais que C suit la loi normale $\mathcal{N}(6\ 000; 2\ 000)$.

- Calculer la probabilité des évènements suivants : $[C > 10\ 000]$ et $[4\ 500 \leqslant C \leqslant 8\ 500]$
- Déterminer le plus petit entier naturel C_0 tel que : $P(C > C_0) < 0,1$.

N.B. Les valeurs de la variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite seront arrondies à 0,01 près au plus proche.

3. Soit E_k l'évènement

" les k voitures accidentées un jour donnée ont chacune un coût de réparation supérieur à 6 000 F "

a) Calculer, en fonction de k, la probabilité de cet évènement E_k.

b) A l'aide de l'approximation utilisée dans le 1.b) pour la loi de N, calculer, en fonction de k, la probabilité qu'un jour donné, il y ait k voitures accidentées et que le coût de réparation de chacune d'elles soit supérieur à 6 000 F.

c) En déduire la probabilité que le nombre de voitures accidentées un jour donné soit au plus égal à 3 et que chaque réparation ait un coût supérieur à 6 000 F.

Pensez à insérer les différentes tables de loi