Concours National des E.S.C.A.E.

Option technologique

Concours National d'admission 1989

MATHEMATIQUES I

EXERCICE I

On considère la statistique suivante indiquant l'indice moyen annuel du coût de la construction (source INSEE, base 100 en 1953)

Année	Rang x_i	Indice y_i
1965	1	188
1966	2	193
1967	3	196
1968	4	205
1969	5	217
1970	6	223
1971	7	236
1972	8	250
1973	9	271
1974	10	314
1975	11	349
1976	12	388
1977	13	426
1978	14	460
1979	15	505

1. Représenter sur papier semi-logarithmique le nuage de points $P_i(x_i, y_i)$
2. On pose : $u_i = \log y_i$ (où log désigne le logarithme décimal) et l'on considère deux périodes : de 1965 à 1972 (inclus) et de 1972 (inclus) à 1979.
   Pour chacune de ces deux périodes :
   (a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et u.
   (b) Déterminer l'équation de la droite de régression de u par rapport à x.
3. Tracer les deux droites de régression sur le graphique de la première question en précisant à chaque fois deux de leurs points.
   N.B. Les calculs seront présentés sous forme de tableaux (un pour chaque période considérée). Les valeurs u_i seront arrondies, au plus proche, à 0,001 près et toutes les autres valeurs des tableaux s'en déduiront sans nouvel arrondi. Toutes les formules utilisées devront être citées. Les résultats des questions 2.a) et 2.b) seront arrondis, au plus proche, à 0,01 près

EXERCICE II

On considère les matrices carrées d'ordre deux suivantes :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$$

1. (a) Calculer P^2; en déduire que P est inversible et que $P^{-1} = \dfrac{1}{2}P$.

   (b) Calculer $A' = P^{-1}AP$ et $B' = P^{-1}BP$; déterminer, pour tout entier $n \geqslant 1$, les matrices $(A')^n$ et $(B')^n$.

   (c) Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a : $A^n = P(A')^nP^{-1} \qquad \text{et} \qquad B^n = P(B')^nP^{-1}$.

   (d) Déterminer les réels a_n, a'_n, b_n et b'_n tels que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & a'_n \\ a'_n & a_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B^n = \begin{pmatrix} b_n & b'_n \\ b'_n & b_n \end{pmatrix}$$

2. On pose, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$u_n = a_n - b_n, \qquad u'_n = a'_n - b'_n \qquad \text{et} \qquad W_n = E(A^n - B^n)C$$

   Déterminer en fonction de u_n et u'_n les réels w_n et w'_n tels que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $W_n = \begin{pmatrix} w_n & w'_n \\ w'_n & w_n \end{pmatrix}$

3. Soit la matrice carrée d'ordre quatre définie par :

$$T = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{20} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{20} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

   On admet que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$T^n = \begin{pmatrix} a_n & a'_n & w_n & w'_n \\ a'_n & a_n & w'_n & w_n \\ 0 & 0 & b_n & b'_n \\ 0 & 0 & b'_n & b_n \end{pmatrix}$$

   On suppose que T représente les échanges de capitaux (en pourcentage) à la fin de chaque année entre les filiales F_1, F_2, F_3, F_4 d'un même groupe financier, de la manière suivante :

   - le coefficient $t_{i,j}$ de la $i^{ième}$ ligne et de la $j^{ième}$ colonne de la matrice T (avec $i \neq j$) est la fraction du capital de F_j qui est transférée à F_i.
   - le coefficient $t_{i,i}$ de la $i^{ième}$ ligne et de la $i^{ième}$ colonne est la fraction du capital de F_i qui reste dans F_i.

   Par exemple, $t_{31} = 0$ signifie qu'il n'y a pas de transfert de capital de F_1 vers F_3

   $t_{34} = \dfrac{1}{4}$ signifie que $\dfrac{1}{4}$ du capital de F_4 est transféré à F_3

   $t_{11} = \dfrac{2}{3}$ signifie que $\dfrac{2}{3}$ du capital de F_1 reste dans F_1.

   On suppose (par soucis de simplification) que le groupe financier fonctionne en " circuit fermé " (c'est-à-dire qu'il n'y a ni apports, ni sorties de capitaux); on note x_0, y_0, z_0, t_0 les capitaux initiaux respectifs des quatre filiales F_1, F_2, F_3, F_4 du groupe et x_n, y_n, z_n, t_n les capitaux respectifs de ces mêmes filiales après le $n^{ième}$ transfert.

   On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad Q_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ t_n \end{pmatrix}$

   (a) Montrer que $Q_1 = TQ_0$ puis que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $Q_n = TQ_{n-1}$.

(b) En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $Q_n = T^n Q_0$

(c) Calculer, pour tout entier $n \geqslant 1$, z_n et t_n. Que peut-on déduire concernant l'avenir financier des filiales F_3 et F_4 ?

(d) Calculer x_n en fonction de a_n, a'_n, b_n, b'_n, x_0, y_0, z_0, t_0; en déduire que le capitale de F_1 tendra au fil des ans vers la moitié du capital du groupe.

PROBLEME

Les parties A et B sont largement indépendantes

PARTIE A

1. Soit la fonction

$$\begin{array}{llll} f: & [0,1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 0,01x^2 + 0,3x^2(1-x) + 0,3x(1-x)^2 + 0,9(1-x)^3 \end{array}$$

(a) Démontrer que f est strictement décroissante sur $[0,1]$

(b) En déduire que, pour tout x de $[0,1]$, on a : $0,01 \leqslant f(x) \leqslant 0,9$

2. Soit la fonction $\begin{array}{llll} g: & [0,+\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 1 - \dfrac{0,6t^2 + 0,8t}{1+t^2} \end{array}$

(a) Etudier les variations de g sur $[0,+\infty[$

(b) Calculer $g'(0)$ et déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 0.

(c) Tracer la courbe représentative de g.

PARTIE B

Un robot fabrique en série des cartes pour micro-ordinateurs; il y a quatre étapes dans la réalisation de chacune des cartes :

1. - tracé des circuits imprimés sur la carte
2. - mise en place, sur la carte, des composants électroniques
3. - soudures et jonctions particulières
4. - contrôle et test de la carte

Une carte peut donc présenter des défauts pour trois raisons (*que nous supposerons indépendantes les une des autres*) correspondant aux trois premières étapes. Le constructeur du robot précise que chacune des imperfections (circuits imprimés mal tracés, composants électroniques mal placés ou défectueux, soudures ou jonctions mal faites) a une probabilité égale à 0,2 de se produire. Enfin,au niveau du contrôle qualité, une carte sans défaut a une probabilité égale à 0,9 de subir avec succès le test, une carte ayant un ou deux défauts a une probabilité égale à 0,1 de subir avec succès le test et enfin une carte ayant trois défauts a une probabilité égale à 0,01 de subir avec succès le test

1. (a) Calculer les probabilités qu'une carte ait respectivement zéro, un, deux ou trois défauts.

   (b) Montrer que la probabilité de l'évènement S : " la carte a subi avec succès le test " est égale à $f(0,2)$ où f est la fonction définie dans la première question de la partie A. On note $p(S) = q_0$. Calculer q_0.

2. La production journalière du robot est de 100 cartes.
   On considère la variable aléatoire N égale au nombre de cartes ayant subi avec succès le contrôle un jour donné.

   (a) Reconnaitre la loi de N.

   (b) Montrer que l'on peut approcher la loi de N par une loi normale.

   (c) Utiliser cette approximation pour calculer à 10^{-4} près au plus proche, la probabilité de l'évènement : " $45 \leqslant N \leqslant 55$ "
   N.B. Les valeurs de la variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite seront arrondies à 10^{-1} près au plus proche