ESCAE 1990 Mathématiques I

Option économique

Algèbre et analyse

Durée : 4 heures.

EXERCICE (sur 6 points)

I.

On considère la fonction numérique g de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}^{\times}$ par :

$$g\left(x\right) = 3e - 6e\ln\left|x\right| + x^3$$

où e désigne la base du logarithme népérien.

1. Calculer, pour $x \in \mathbb{R}^{\times}$, $g'(x)$.
2. En déduire que sur $\mathbb{R}_+^{\times}$ g admet un minimum strictement positif.
3. Calculer $g\left(-e^{\frac{1}{3}}\right)$.
4. En déduire le signe de $g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^{\times}$.

II.

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}^{\times}$ par : $f\left(x\right) = 3e\dfrac{\ln|x|}{x^2} + x - 1$. On note (C) la courbe représentative de f .

1. Etudier les branches infinies de (C). Préciser la position relative de (C) par rapport à son asymptote oblique.
2. Calculer $f'(x)$. En déduire, en utilisant les résultats du I les variations de$f$.(On démontrera que : $f'\left(x\right) = \dfrac{g(x)}{x^3}$).
3. Calculer $f"(x)$. En déduire l'existence de deux points d'inflexion dont on donnera les coordonnées.
4. Construire la courbe (C) dans un repère orthonormé du plan. (unité : 2 cm.).
5. (a) Calculer l'aire A_λ exprimée en cm^2 de la partie du plan délimitée par la courbe (C), la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$, et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \lambda$ avec $\lambda > 1$.

   (b) Quelle est la limite de $A(\lambda)$ quand λ tend vers l'infini ? Interpréter graphiquement ce résultat.
6. m désigne un nombre réel.

   (a) Déterminer en fonction de m le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

   (b) Soit x_0 l'unique solution de l'équation $f(x) = 2$.
   Déterminer l'entier naturel p tel que : $\dfrac{p}{100} \leqslant x_0 < \dfrac{p+1}{100}$.

PROBLEME (sur 14 points)

Etude de $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{t^k A^k}{k!}$ où A désigne une matrice carrée et t un réel.
Les deux parties du problème sont indépendantes.

I.

On donne les matrices : $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -8 \\ 6 & 4 & -7 \\ 8 & 6 & -10 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$..

1. Calculer A^2, A^3 . En déduire A^n, $n \geqslant 3$.
2. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.
   (a) Démontrer que P est inversible et donner l'expression de son inverse P^{-1}.
   (b) Expliciter la matrice $T = P^{-1}AP$.
   (c) Calculer T^2, T^3 . Retrouver ainsi l'expression deA^n, $n \geqslant 3$.
3. t étant un nombre réel donné, on définit la matrice notée $B(t)$ par :
   $$B\left(t\right) = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2$$
   (on ne cherchera pas à expliciter $B(t)$).
   (a) Calculer $B(0)$.
   (b) Démontrer : $\forall\left(t, t'\right) \in \mathbb{R}^2, \quad B\left(t + t'\right) = B\left(t\right) B\left(t'\right)$.
   On notera désormais $B\left(t\right) = e^{tA}$.
   (c) En remarquant qu'il n'existe pas de réels α tel que $A = \alpha A^2$, démontrer que : $e^{tA} = e^{t'A} \Leftrightarrow t = t'$.
   (d) Déterminer le réel t' tel que : $e^{tA}.e^{t'A} = e^{\theta}$.
   En déduire que e^{tA} est inversible et donner l'expression de son inverse.

II.

On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer A^2.
   (b) Démontrer qu'il existe deux réels u_2 et v_2 tels que : $A^2 = u_2 A + v_2 I$
   (c) En déduire l'existence de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que : $A^n = u_n A + v_n I$, ces deux suites vérifiant :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 5u_n + v_n & (1) \\ v_{n+1} = -6u_n & (2) \end{cases}$$
2. (a) De l'équation (1) tirer l'expression de v_n , $n \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire une relation entre u_{n+2}, u_{n+1} et u_n.
   (c) Calculer u_n puis v_n en fonction de n.
   (d) En déduire l'expression sous forme de tableau matriciel de A^n, $n \in \mathbb{N}$.
3. n étant un entier naturel, on considère la matrice S_n définie par : $S_n = \sum\limits_{k=0}^{k=n} \dfrac{t^k A^k}{k!}$, t désignant un nombre réel.
   (a) Expliciter la matrice S_n en écrivant ses quatre éléments notés $s_{1,1}^{(n)}, s_{1,2}^{(n)}, s_{2,1}^{(n)}, s_{2,2}^{(n)}$.

(b) On note pour $1 \leqslant i \leqslant 2$ et $1 \leqslant j \leqslant 2$ $\quad s_{i,j} = \lim\limits_{n\to\infty} s_{i,j}^{(n)}$ et $S(t)$ la matrice carrée d'ordre 2 dont les éléments sont les $s_{i,j}$.

Montrer que : $S(t) = \begin{pmatrix} 2e^{3t} - e^{2t} & -e^{3t} + e^{2t} \\ 2e^{3t} - 2e^{2t} & -e^{3t} + 2e^{2t} \end{pmatrix}$

(On rappelle que $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\lambda^k}{k!} \right) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$)

4. (a) Déterminer les matrices P et Q telles que : $S(t) = Pe^{3t} + Qe^{2t}$.

   (b) Calculer P^2 , Q^2, PQ et QP.

   (c) En déduire :

$$\forall \left(t, t'\right) \in \mathbb{R}^2, \quad S\left(t + t'\right) = S\left(t\right) S\left(t'\right)$$

puis

$$S\left(nt\right) = S\left(t\right)^n, n \in \mathbb{N}.$$

(on notera désormais $S\left(t\right) = e^{tA}$)

5. Application : f et g désignent deux fonctions réelles de la variable réelle t, définies, dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant le système :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} f'\left(t\right) = 4f\left(t\right) - g\left(t\right) \\ g'\left(t\right) = 2f\left(t\right) + g\left(t\right) \end{cases}, \quad f(0) = 2, \quad g(0) = 5$$

On pose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y\left(t\right) = \begin{pmatrix} f\left(t\right) \\ g\left(t\right) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y'\left(t\right) = \begin{pmatrix} f'\left(t\right) \\ g'\left(t\right) \end{pmatrix}.$$

Le système proposé s'écrit alors : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y'\left(t\right) = AY\left(t\right)$

   (a) Vérifier que : $Y\left(t\right) = e^{tA}Y\left(0\right)$ est solution du système proposé.
   (on explicitera $Y(t)$ en utilisant l'expression de e^{tA} obtenue au 3

   (b) i. Préciser la nature des branches infinies de C_f la courbe représentative de f.
   ii. Etudier les variations de f.
   iii. Démontrer que C_f admet un point d'inflexion dont on précisera les cordonnées.
   iv. Construire la courbe C_f dans un repère orthogonal (Unités : 5 cm en abscises ; 2 cm en ordonnées.).