Concours National des E.S.C.A.E.

Option générale

Concours National d'admission 1990

MATHEMATIQUES I

Algèbre et analyse

De nombreuses questions sont indépendantes ou s'appuient sur des résultats donnés dans l'énoncé

1. Pour x réel, on considère l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}dt$ que l'on ne cherchera pas à calculer.
   Déterminer l'intervalle I de $\mathbb{R}$, ensemble des valeurs de x pour lesquelles l'intégrale est convergente.

2. Soit : $\begin{array}{rccl} \varphi : & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}dt \end{array}$

   (a) Montrer que : $\forall x \in I, \quad \varphi(x) \geqslant 0$

   (b) Etablir que φ est décroissante sur I (sans chercher à calculer φ').

3. (a) Prouver que :

   i. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leqslant \int_0^x (x-u)e^{-u}du \leqslant \frac{x^2}{2}$

   ii. $\forall x \in \mathbb{R}_-, \quad 0 \leqslant \int_0^x (x-u)e^{-u}du \leqslant \frac{x^2}{2}e^{-x}$

   (b) i. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $\int_0^x (x-u)e^{-u}du$.

   ii. En déduire que :

   $$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \forall h \in \mathbb{R}, \quad e^{-th} - 1 = -th + J(th)$$

   où $J(th)$ est une intégrale que l'on explicitera.

   iii. Montrer que pour tout t de $\mathbb{R}_+$:

   $$\forall h \in \mathbb{R}_+, \qquad 0 \leqslant J(th) \leqslant \frac{(th)^2}{2}$$
   $$\forall h \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leqslant J(th) \leqslant \frac{(th)^2}{2}e^{-th}$$

4. (a) Montrer que :

   $$\forall x \in I, \quad \forall h \in]-x, +\infty[, \quad \varphi(x+h) - \varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}(-th + J(th))}{1+t}dt$$

   (b) Pour $x \in I$ et $h \in]-x, 0[\cup]0, +\infty[$ donner une expression sous forme d'intégrale de :

   $$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} - \int_0^{+\infty} \frac{-te^{-xt}}{1+t}dt$$

(c) En déduire qu'en tout point x de I, φ est dérivable à droite.

(d) Démontrer que :

$$\forall x \in I, \quad \forall h \in]-\frac{x}{2}, 0[, \quad \left| \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} - \int_0^{+\infty} \frac{-te^{-xt}}{1+t} dt \right| \leqslant \frac{1}{2} |h| \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t} e^{-tx/2} dt$$

(e) En déduire que φ est dérivable en tout point x de I et que sa dérivée est :

$$\varphi' : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_0^{+\infty} \frac{-te^{-xt}}{1+t} dt \end{array}$$

(f) Etudier le sens de variation de φ'. En déduire que φ est convexe.

5. (a) Montrer que :

$$\forall x \in I, \quad \varphi(x) - \varphi'(x) = \frac{1}{x}.$$

(b) En déduire que φ est de classe C^∞ sur I.
(On pourra, par exemple, utiliser une récurrence).

6. (a) Déterminer la limite de φ en $+\infty$

(b) En déduire la limite de φ' en $+\infty$

7. (a) Pour $x \in I$ et $k \in \mathbb{N}^\times$, exprimer $\varphi(x) - \varphi^{(k)}(x)$ sous la forme d'une somme ($\varphi^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de φ)

(b) En déduire la limite de $\varphi^{(k)}$ en $+\infty$.

8. Pour $A \in \mathbb{R}_+$, on considère :

$$R_A(x) = \int_A^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt \qquad \text{(avec } x \in I\text{)}$$

(a) Montrer que :

$$0 \leqslant R_A(x) \leqslant \frac{1}{(1+A)x}$$

(b) En déduire en fonction de x ($x \in I$) une valeur de A telle que $\int_0^A \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$ soit une valeur approchée à 10^{-2} près de $\varphi(x)$.

(c) A l'aide d'une calculatrice donner une valeur approchée à 10^{-2} près de $\varphi(1)$ et $\varphi(2)$. (On prendra, si le programme de la calculatrice le demande, une subdivision en 200 intervalles et on supposera que l'erreur de calcul due à la machine est nulle)

(d) Tracer la courbe représentative ϕ de φ sur $[1, +\infty[$ dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (Unité : 10 cm).
On tracera les tangentes à ϕ aux points $M_1(1, \varphi(1))$ et $M_2(2, \varphi(2))$

9. (a) Etablir que :

$$\forall x \in I, \quad \varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^2} dt$$

(b) Prouver que :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^2} dt = 0$$

(c) En déduire un équivalent de $\varphi(x)$ au voisinage de $+\infty$.

(d) Montrer plus généralement que $\varphi(\dfrac{1}{X})$ admet en zéro un développement limité d'ordre 3 que l'on précisera.

10. (a) Etablir que :

$$\forall x \in I, \quad \varphi(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

(b) En déduire que $\varphi(x)$ est équivalent à $-\ln x$ au voisinage de 0.

(c) Compléter la représentation graphique de φ sur $]0, 1]$ (dans le même repère qu'au 8. d))