ESC CHAMBERRY 1990

ALGEBRE LINEAIRE

Soit E un espace vectoriel de dimension 3, rapporté à la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
Soit $a \in \mathbb{R}$ et A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a-2 & 1 & 1 \\ 1 & a-2 & 1 \\ 1 & 1 & a-2 \end{pmatrix}$$

1. Pour quelles valeurs de a, A est-elle non inversible ?
2. Soient les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$
   On considère l'équation matricielle : $AX = B$
   (a) Résoudre l'équation pour $a = 0$
   (b) Résoudre cette équation pour $a = 3$
   (c) Pour $a = 1$, calculer A^{-1} et résoudre.

PROBABILITES

Soient X et Y deux variables aléatoires.
X peut prendre les valeurs -1 et 1 avec les probabilités respectives. $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$.
Y peut prendre les valeurs -1 et 2 avec les probabilités respectives $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$.

1. Calculer $E(X)$, $E(Y)$, $E(X^2)$, $E(Y^2)$.
2. Soit $P(X = -1, Y = -1) = \lambda$, paramètre réel supposé connu.
   Calculer $P(X = 1, Y = -1)$, $P(X = -1, Y = 2)$, $P(X = 1, Y = 2)$
   Montrer que $\frac{1}{6} \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{2}$.
3. Calculer en fonction de λ le coefficient de corrélation de X et Y. Entre quelles limites peut-il varier ?
4. Pour quelle valeur de λ, X et Y sont-elles indépendantes ? Quelle est la signification des valeurs extrêmes $\lambda = \frac{1}{2}$ et $\lambda = \frac{1}{6}$?

ANALYSE : SUITES ET INTEGRALES

1. Expliquez brièvement la méthode des rectangles pour obtenir une valeur approchée d'une intégrale.
   Donner un encadrement de $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$ en partageant $[0, 1]$ en 5 intervalles
2. Application aux suites :
   Soit la suite (U_n) définie par :
   $$u_n = \frac{1 + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}, \qquad n \in \mathbb{N}^{\times}$$
   En faisant apparaître une fonction f définie sur un intervalle $[0, 1]$, définir la limite de cette suite.

3. Soit $f(x) = \exp(\dfrac{1}{x^2-1})$ sur $]-1,1[$.
Faire l'étude complète de f.
Peut-on faire un prolongement par continuité en -1 et 1 ?
Qu'en serait-il alors de la dérivabilité en -1 et 1 ?
Faire la représentation graphique $(\mathcal{C}_f)$
Soit $U_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{h=0}^{n-1} \exp(\dfrac{n^2}{h^2-n^2})$
Ecrire U_n en fonction de f.
Montrer que (U_n) est convergente.
En déduire un encadrement de l'aire limité par $x=0$, $x=1$, $\mathcal{C}_f$ et l'axe des abscisses (on partagera $[0,1]$ en 10 intervalles)