ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE COMPIEGNE
CONCOURS D'ADMISSION 1986
Option économique
MATHEMATIQUES I

PROBLEME I

Le plan est rapporté au repère orthogonal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Unités : $\left\|\overrightarrow{i}\right\| = 1$ cm, $\left\|\overrightarrow{j}\right\| = 2$ cm.

PARTIE 1

Soient les fonctions numériques à valeurs réelles g et h définies par :

$$g(x) = h(x) - \ln|x+1| \qquad h(x) = \frac{4x^2 + x - 1}{2(x+1)}$$

ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Montrer que $h(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$h(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

   où a, b, c sont trois réels que l'on déterminera.

2. Etudier les branches infinies de g.
3. Calculer les limites de $g(x)$ quand x tend vers -1.
4. Etudier les variations de g.
5. Etudier la concavité de g.
6. Construire le graphe de g sur $]-1, +\infty[$.
7. Calculer $g(\dfrac{x-1}{2})$.
8. Montrer qu'il n'existe que deux réels x_1 et x_2 $(x_1 < x_2)$, vérifiant l'équation $g(x) = 0$.
   Donner les valeurs approchées de x_1 et x_2 à $0,01$ près par défaut.
9. En déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs du réel x.
10. Calculer l'aire du domaine plan délimité par la courbe représentative de g, l'axe $x'x$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

PARTIE 2.

Soit la fonction f définie par :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{7}(4x^3 - 6x^2 + 3 - 6(x+1)^2.\ln\left|\frac{x+1}{2}\right| \text{ si } x \neq -1 \\ \text{et } f(-1) &= -1 \end{aligned}$$

1. Etudier la continuité de f en -1.
2. Etudier la dérivabilité de f en -1.
3. Etudier les branches infinies de f.
4. Montrer que : $f'(x) = \dfrac{12(x+1)}{7}.g(\dfrac{x-1}{2})$
   où g est la fonction étudiée dans la partie I.
5. En déduire le signe de $f'(x)$ et donner les variations de f.
6. Construire le graphe de f.

PROBLEME II

Dans ce problème, on note :

- $\mathcal{M}$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels, I la matrice unité et 0 la matrice nulle.
- pour $m \in \mathcal{M}$, $m^0 = I$, $\quad m^2 = m.m$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^\times$, $\quad m^k = m^{k-1}.m$
- P_n le polynôme défini par : $P_n(u) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k u^k$, $n \in \mathbb{N}$, $u \in \mathbb{R}$ et $a_k \in \mathbb{R}$.
- θ le polynôme nul.

On considère :

- les matrices a et b de $\mathcal{M}$ vérifiant les conditions :

$$a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad ab = ba = 0, \quad a^2 = a, \quad b^2 = b$$

- E l'ensemble des matrices $m(x,y)$ de $\mathcal{M}$ telles que :

$$m(x,y) = xa + yb, \qquad \text{où } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}.$$

PARTIE 1.

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Montrer que (a,b) est un système libre et en déduire la dimension de E.
3. La matrice unité I est-elle élément de E ?
4. Montrer que E est stable pour le produit matriciel.
5. Résoudre et discuter l'équation : $m(x,y).m(x',y') = I$ où x et y sont donnés, x' et y' les inconnues. Conclusion.
6. Calculer pour $k \in \mathbb{N}$, $\quad (m(x,y))^k$.

PARTIE 2.

1. Pour $a_k = 1, \quad k \in \{0, ..., n\}$, écrire

   (a) $P_n(a)$ et $P_n(b)$ en fonction de a, b et n.

   (b) $P_n(m(x, y))$ en fonction de a, b, n, x et y.

2. Pour $a_n = 1$ et $a_k \in \mathbb{R}, \quad k \in \{0, ..., n\}$

   (a) Etudier le cas $P_1(a) = 0$

   (b) Déterminer le polynôme P_2 tel que $P_2(a) = 0$.

   (c) Pour $n \geqslant 2$, montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que : $P_n(a) = 0$ est que :

   $$P_n(u) = P_2(u).Q(u)$$

   où Q est un polynôme de degré $n - 2$.

PARTIE 3.

$$a = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -4 \\ -2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix}, \quad m = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer : $a^2, \quad b^2, \quad ab, \quad ba \quad$ et $\quad m^2$.
2. Déterminer x et y tels que $m = xa + yb$.
3. Calculer m^k où $k \in \mathbb{Z}$
4. Déterminer les valeurs propres de a.
5. Montrer que b et m admettent les mêmes vecteurs propres.