ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE COMPIEGNE
CONCOURS D'ADMISSION 1987
Option économique
MATHEMATIQUES I

PROBLEME I

On considère la famille de fonctions f_k (k réel), de $\mathbb{R}_+^\times$ dans $\mathbb{R}$, donnée par :

$$f_k(x) = \frac{k + \ln x}{x}$$

1. (a) Etudier les variations de la fonction f_k.
   (b) Montrer qu'il existe un point I_k de $(\mathcal{C}_k)$ dont l'abscisse annule la dérivée seconde de f_k.
   (c) Vérifier que :
   $$\forall k \in \mathbb{R}, \quad \forall x > 0, \quad x^3 f_k''(x) - 2x.f_k(x) = -3.$$
   En déduire l'équation d'un ensemble (J) auquel appartient les points I_k lorsque k décrit $\mathbb{R}$.
   (d) Tracer les courbes $(\mathcal{C}_{-1})$, $(\mathcal{C}_0)$, $(\mathcal{C}_1)$ relativement à un repère orthogonal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ tel que $\left\|\overrightarrow{i}\right\| = 1$ cm et $\left\|\overrightarrow{j}\right\| = 5$ cm.

2. (a) Soit $f_k^{(n)}(x)$ la dérivée n^{ieme} de la fonction f_k.
   Calculer $f_k^{(3)}(x)$.
   (b) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul, il existe deux réels λ_n et μ_n, indépendants de l, tels que pour tout x strictement positif :
   $$f_k^{(n)}(x) = \lambda_n . \frac{k + \ln x - \mu_n}{x^{n+1}}$$
   et donner les équations récurrentes vérifiées par λ_n et μ_n.
   (c) Calculer λ_n et μ_n en fonction de n.
   (d) Montrer que pour tout entier $n > 0$:
   $$\frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{n}.$$
   En déduire que : $\ln(n+1) \leqslant \mu_n \leqslant 1 + \ln n$.
   La suite μ_n est-elle convergente ?

3. (a) Calculer l'aire de l'ensemble des points du plan définis par :
   $$\left\{ \begin{array}{c} a^n.e^{-k} \leqslant x \leqslant a^{n+1}.e^{-k} \\ 0 \leqslant y \leqslant f_k(x) \end{array} \right. \qquad a > 1 \text{ et } n \text{ entier naturel}$$
   (b) Montrer que ces aires sont indépendantes de k et forment une suite arithmétique dont on déterminera la raison.

PROBLEME II

A chaque entier naturel n, on fait correspondre l'application g_n telle que :

$$x \quad \mapsto \quad g_n(x) \qquad \text{(avec } x \in [0,1]\text{), définie comme suit :}$$
$$\begin{cases} \text{si } x \in [0, \dfrac{1}{n+1}[& g_n(x) = -(n+1)^3x^2 + (n+1)x^2 \\ \text{si } x \in [\dfrac{1}{n+1}, 1] & g_n(x) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, la fonction g_n est intégrable et calculer :

$$I_n = \int_0^1 g_n(x)dx$$

2. Montrer que la suite de terme général I_n est convergente; déterminer sa limite.

3. A toute valeur x fixe de $[0,1]$, on associe la suite de terme générale $j_n = g_n(x)$.
   Montrer que la suite de terme général j_n est convergente; déterminer sa limite.

4. On définit alors une application g telle que :

$$x \mapsto g(x) = \lim_{n \to +\infty} g_n(x) \qquad \text{avec } x \in [0,1]$$

   Montrer que la fonction g est intégrable.
   Calculer $\int_0^1 g(x)dx$.

5. Donner les valeurs de $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[\int_0^1 g_n(x)dx\right]$ et $\int_0^1 \left[\lim\limits_{n \to +\infty} g_n(x)dx\right]$
   Comparer les résultats.
   N.B. : Pour guider le raisonnement, il est conseillé de tracer une représentation graphique de g_n.

PROBLEME III

NOTATIONS

- $\mathcal{M}$ est l'algèbre des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
  On note : 0_3 la matrice nulle, I_3 la matrice unité.
  Pour $M \in \mathcal{M}$: $P^0 = I$, $\quad P^2 = P.P$ et pour $n \geqslant 1$, $\quad P^n = P^{n-1}.P$
  On donne les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

- M est l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathcal{M}$ qui, à tout couple (x, y), fait correspondre $M(x, y)$ tel que $M(x, y) = x.A + y.B$
  On note $\mathcal{E}$ l'espace-image de M.

- E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3, sa base canonique : $B_0 = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$
  On donne le vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$.

- $f_{x,y}$ est une application linéaire de E dans E. La matrice de $f_{x,y}$ dans la base B_0 est $M(x, y)$. On note F l'ensemble des $f_{x,y}$.

- L'orbite de $\overrightarrow{u}$, notée $\theta(\overrightarrow{u})$ est l'ensemble des images de $\overrightarrow{u}$ par $f_{x,y}$ quand $f_{x,y}$ décrit F.

PARTIE 1

1. Donner l'expression de la matrice $M(x, y)$.
2. Démontrer que M est une application linéaire. Quel est son noyau ?
   Quelle est la dimension de $\mathcal{E}$?
3. Déterminer le noyau et l'espace-image de $f_{1,0}$ et de $f_{0,1}$.
   Etudier la position relative de ces sous-espaces vectoriels de E.
4. Déterminer l'orbite de $\overrightarrow{u}$.

PARTIE 2

1. Calculer A^2 et A^3 et en déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer $A.B$ et $B.A$
4. Calculer $[M(x, y)]^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

PARTIE 3

1. Déterminer les valeurs propres ($\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$) et une base de vecteurs propres de A.
2. Montrer que B admet les mêmes vecteurs propres que A.
   Quelles sont les valeurs propres correspondantes ?
3. Diagonaliser $M(x, y)$.
   Retrouver l'expression de $[M(x, y)]^n$ pour $n \in \mathbb{N}$