ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE COMPIEGNE
CONCOURS D'ADMISSION 1987
Toutes options (générale, économique, technologique)
MATHEMATIQUES II

PROBLEME I

L'objet de ce problème est l'étude d'un jeu de dés.
Les trois parties sont largement indépendantes.

NOTATIONS

1. Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormé $\mathcal{B} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ $\left\|\overrightarrow{i}\right\| = \left\|\overrightarrow{j}\right\| = 1$ cm.
   Les fonctions numériques f_1 et f_2 de la variable réelle x, sont définies par :
   $$f_1(x) = 4.5^x - 2.4^x \quad \text{et} \quad f_2(x) = 6^x.$$
   On note $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les courbes représentatives correspondantes.
2. La suite réelle u est définie par :
   $$u_0 = u_1 = 0$$
   et pour $n \in \mathbb{N}$, la relation récurrente :
   $$18u_{n+2} - 27u_{n+1} + 10u_n = 1$$
   et les suites v et w par :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{array}{l} v_n = 3u_{n+1} - 2u_n - 1 \\ w_n = 6u_{n+1} - 5u_n - 1 \end{array}$$
3. Si M et N sont des évènements, on note :
   $\overline{M}$ l'évènement contraire de M
   $P(M)$: la probabilité que l'évènement M se réalise.
   $P_N(M)$: la probabilité conditionnelle de M sachant N.
4. Le jeu : On dispose d'un dé supposé parfait.
   Pour n lancers du dé ($n \in \mathbb{N}^{\times}$), on note les évènements suivants :
   A_n : obtenir au moins un as.
   B_n : obtenir au moins un 6
   G_n : gagner
   (On gagne, si au cours des n lancers, on a obtenu au moins un as et au moins un 6)

PARTIE 1

1. Etudier les variations de f_1 et f_2.
2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ avec les axes $x'x$ et $y'y$.
3. Représenter dans le même repère $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ en mettant en évidence la position relative de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ (on ne demande pas de déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$).
4. Le graphique permet de montrer l'existence et l'unicité du plus petit entier n_0 tel que : $f_1(n_0) \leqslant f_2(n)$.
   Donner n_0.

PARTIE 2

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. Démontrer l'unicité de u.
3. Calculer v_{n+1} en fonction de v_n.
   En déduire que v est une suite géométrique. On donnera le premier terme v_0 et la raison q'.
4. Calculer w_{n+1} en fonction de w_n.
   En déduire que w est une suite géométrique. On donnera le premier terme w_0 et la raison q''.
5. Déduire de ce qui précède l'expression de u_n en fonction de n.

PARTIE 3

1. Calculer $P(G_1)$, $P(G_2)$ et $P(G_3)$.
2. Que représente les évènements suivants :
   $$A_n \cap B_n, \qquad \overline{A_n} \cap B_n, \qquad A_n \cap \overline{B_n}, \qquad \text{et} \qquad \overline{A_n} \cap \overline{B_n} \text{ ?}$$
   Calculer leurs probabilités.
3. Calculer les probabilités conditionnelles suivantes :
   $$\begin{array}{ll} P_{G_n}(G_{n+1}) & P_{\overline{A_n}\cap B_n}(G_{n+1}) \\ P_{A_n\cap\overline{B_n}}(G_{n+1}) & P_{\overline{A_n}\cap\overline{B_n}}(G_{n+1}) \end{array}$$
4. Exprimer $P(G_{n+1})$ en fonction des probabilités conditionnelles précédentes.
5. Déterminer entrer $P(G_{n+2})$, $P(G_{n+1})$ et $P(G_n)$ une relation de récurrence.
6. Déterminer le nombre minimum n_0, de dés à lancer pour que $p(G_{n_0}) \geqslant \dfrac{1}{2}$

PROBLEME II

La durée d'une communication téléphonique à grande distance est assimilée à une variable aléatoire X dont la fonction de répartition est définie par les formules :

$$\begin{cases} F(x) = 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ F(x) = 1 - \dfrac{2}{3}e^{-\frac{2}{3}x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Déterminer la densité de la loi de X.
2. Calculer les moments d'ordre 1 et 2 et l'écart-type de X.
3. Calculer les probabilités $P(3 \leqslant X \leqslant 6)$ et $P(X \leqslant 9/X \geqslant 5)$
4. A des fins statistiques, une société décide de comptabiliser le nombre de communications dont la durée est comprise entre 3 et 9 unités, parmi 5 000 appels.
   Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de communication exclues du sondage.
   Quelle est la loi suivie par Y ?
   Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.
   A l'aide d'une approximation convenable, calculer la probabilité pour que Y soit inférieure à 2 000.

5. Le prix moyen d'une communication dont la durée est comprise entre 3 et 9 unités coûte 57 F à la société, qui facture ses abonnés suivant la loi définie par la variable aléatoire

$$Z = \frac{5000 \times 57}{5000 - Y}$$

En approximant Z par un développement limité, calculer l'espérance et l'écart-type de Z.

(On donnera les valeurs numériques à 10^{-3} près)