ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE COMPIEGNE
CONCOURS D'ADMISSION 1988
Option économique
MATHEMATIQUES I

NOTATIONS

1. Le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ ($\left\|\overrightarrow{i}\right\| = 1$ cm, $\left\|\overrightarrow{j}\right\| = 10$ cm)
   On considère la fonction numérique φ définie par la relation :
   $$\varphi(x) = \frac{\ln x(\ln x - 1)}{x}$$
   et l'on note $\mathcal{C}_\varphi$ sa courbe représentative.
2. x est un élément de l'intervalle $[-1, 0]$, m et n sont deux entiers naturels, on pose $f_{m,n}(x) = x^m(x+1)^n$
3. On note $I_{m,n} = \int\limits_{-1}^{0} f_{m,n}(x)dx$.

PARTIE 1

Dans cette partie : $m \neq 0$ et $n \neq 0$.

1. Montrer que la fonction $f_{m,n}$ est C^∞
2. Montrer qu'il existe au moins une valeur c de l'intervalle $]-1, 0[$ telle que $f'_{m,n}(c) = 0$
3. Calculer c en fonction de m et n.
4. Donner les variations de $f_{m,n}$ sur $[-1, 0]$. Discussion.
5. Montrer que $f_{m,n}$ admet un développement limité pour x au voisinage de 0 et donner ses trois premiers termes.
6. En déduire que, pour m pair, $\dfrac{1}{m+1}$ est une valeur approchée de $I_{m,n}$.

PARTIE 2

1. Déterminer, à l'aide d'une intégration par parties, une relation de récurrence entre $I_{m,n}$ et $I_{m-1,n+1}$.
2. En déduire la valeur de $I_{m,n}$ en fonction de m, n et $I_{0,m+n}$.
3. Calculer $I_{0,m+n}$ et écrire $I_{m,n}$ en fonction de m et n.
4. Calculer l'intégrale : $\int\limits_{0}^{1} x^n(x-1)^m dx$.
5. En déduire la valeur de : $\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{x}.(\ln x)^n[\ln(\frac{x}{e})]^m dx$.

6. Calculer : $\lim_{p \to +\infty} \left[\sum_{k=0}^{p-1} \frac{k^n.(k-p)^m}{p^{m+n+1}} \right]$

7. En utilisant $I_{m,n}$ et la formule du binôme, démontrer l'identité :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{C_{m+n}^{n} C_n^k (-1)^k}{m+k+1} = \frac{1}{m+n+1}$$

PARTIE 3

1. Donner le domaine de définition de φ.
   Calculer les limites aux bornes du domaine.
   Préciser les asymptotes.

2. Montrer que φ est dérivable sur son domaine et calculer φ'.
   Dresser le tableau de variation de φ.

3. Etudier la convexité de $\mathcal{C}_\varphi$.

4. $\mathcal{C}_\varphi$ coupe l'axe $x'x$ en deux points.
   Donner l'équation des tangentes à $\mathcal{C}_\varphi$ en ces deux points.

5. Construire la courbe représentative $\mathcal{C}_\varphi$ de φ.

6. Montrer par récurrence que la dérivée d'ordre r ($r \in \mathbb{N}$) de φ, notée $\varphi^{(r)}$, est de la forme :

$$\frac{P(\ln x)}{x^{r+1}}$$

   où P est un trinôme du second degré.

7. Calculer l'aire de la courbe comprise entre $\mathcal{C}_\varphi$ et l'axe $x'x$.