ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE COMPIEGNE
CONCOURS D'ADMISSION 1988
Option générale
MATHEMATIQUES I

EXERCICE

Soit f la fonction numérique de la variable réelle définie sur l'intervalle $[0,1[$ par : $f(x)=x$
et pour tout élément x de $\mathbb{R}$ par : $2f(x+1)=f(x)$.

1. Calculer $f(2)$ et $f(8)$
2. Pour tout x_0, élément de l'intervalle $[0,1[$ et pour tout entier naturel n, donner l'expression de $f(x_0+n)$ en fonction de n et $f(x_0)$.
3. Pour tout x, élément réel de l'intervalle $[n,n+1[$, n étant un nombre entier naturel, expliciter $f(x)$.
4. Construire la courbe représentative de f, dans un repère orthonormé sur l'intervalle $[-3,4[$.
   (On prendra comme unité graphique : 2 cm)
5. On pose, pour tout n entier naturel : $I_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$.
   Déterminer une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
6. Exprimer I_n en fonction de I_0.
7. En déduire la valeur de I_n.
8. Retrouver cette valeur en calculant directement I_n.

PROBLEME

NOTATIONS

1. $\mathfrak{M}$ est l'algèbre des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.
   On rappelle les notations classiques :
   $$O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$
   Pour tout entier X non nul de $\mathfrak{M}$ et pour tout entier naturel, on a :
   $$\begin{aligned} &X^n = X^{n-1}.X \text{ pour } n>0 \\ \text{et}\quad &X^0 = I \end{aligned}$$
2. On donne les matrices :
   $$A=\begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix} \qquad U=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad V=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}$$
3. E est le sous-ensemble de $\mathfrak{M}$ formé des matrices
   $$M(x,y)=xA+yI \qquad \text{où } x \text{ et } y \text{ sont des réels.}$$

4. On considère l'application φ qui, à toute matrice X de $\mathfrak{M}$ fait correspondre

$$\varphi(X) = U.X.V$$

5. Pour tout entier naturel n, on considère la suite α définie par :

$$\alpha_n = \frac{1}{5}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

6. Pour tout entier naturel n, on considère la suite β définie par la relation de récurrence :

$$\beta_{n+2} + \beta_{n+1} - \beta_n = 0 \qquad (r)$$

et les conditions initiales : $\beta_0 = 1, \quad \beta_1 = -1$

PARTIE 1

1. (a) Démontrer l'unicité de la suite β.
   (b) Démontrer que la suite α vérifier la relation de récurrence (r).
   (c) Calculer α_0 et α_1. Conclusion.
   (d) En déduire que α_n est un entier relatif.
   (e) En utilisant la formule du binôme, donner l'expression de α_n sans utiliser $\sqrt{5}$.

2. (a) Pour d et λ réels fixés ($d \neq 0$), résoudre le système S d'inconnues a, b, c, réelles, définie par :

$$S : \begin{cases} (2-\lambda) + 2b - c = d & (1) \\ 2a + (4-\lambda) - c = d & (2) \\ -a - b + (1-\lambda)c = 2d & (3) \end{cases}$$

   (b) Déterminer une relation vérifiée par λ pour que de plus, on ait :

$$-a - 2b + c + (2-\lambda)d = 0 \qquad (4)$$

   (c) Calculer a, b et c pour

$$\lambda_3 = \frac{7+3\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad d = -3-\sqrt{5}$$

   Ecrire dans ce cas, la matrice : $X_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

3. (a) Montrer que le polynôme :

$$P(\lambda) = \lambda^4 - 9\lambda^3 + 16\lambda^2 - 9\lambda + 1$$

   admet 1 comme racine double.
   (b) Résoudre $P(\lambda) = 0$

PARTIE 2

1. Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}$.

2. Montrer que (A, I) forme une base de E.

3. Démontrer que E est invariant par φ.

4. Calculer : $\varphi(0)$, $\varphi(I)$ et $\varphi(X_3)$

5. Montrer que $\varphi(X_3) = \lambda_3.X_3$.

PARTIE 3

1. Démontrer que φ est une application linéaire; déterminer son noyau et son espace-image.
2. Montrer que φ réalise une bijection et donner l'expression de son application réciproque notée φ^{-1}.
3. Démontrer que pour tout couple (X, Y) d'éléments de $\mathfrak{M}^2$:

$$\varphi(X.Y) = \varphi(X).\varphi(Y)$$

PARTIE 4

1. Calculer les valeurs propres de φ et leurs ordres de multiplicité.
2. Déterminer pour chaque valeur propre, le sous-espace vectoriel propre correspondant (on donnera une base).

PARTIE 5

1. Calculer A^2, A^3 et A^4.
2. Démontrer que :

$$A^n = \begin{pmatrix} u_{n+2} & u_{n+1} \\ u_{n+1} & u_n \end{pmatrix}$$

   où u_n est le terme général d'une suite u.
3. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite u.
4. Démontrer que pour tout couple (m, n) d'éléments de $\mathbb{N}^2$, on a :

$$u_{m+n+2} = u_{m+1}.u_{n+1} + u_m.u_n.$$

5. Donner l'expression de A^n en fonction de n.