ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE COMPIEGNE
CONCOURS D'ADMISSION 1988
toutes options (générale, économique, technologique)
MATHEMATIQUES II

EXERCICE 1

On note X une variable aléatoire réelle, $E(X)$ son espérance mathématique et $V(X)$ sa variance.
Pour n entier naturel, $m_n(X)$ est le moment non centré de X d'ordre n, défini par :

$$m_n(X) = E(X^n)$$

On rappelle que : $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{dt}{1+t^2} = \dfrac{1}{2}$.
Pour tout réel quelconque λ, f_λ est la fonction numérique de la variable réelle t définie par :

$$\begin{array}{ll} f_\lambda(t) = \dfrac{\lambda}{1+t^2} & \text{pour } -1 \leqslant t \leqslant 1 \\ \text{et} \quad f_\lambda(t) = 0 & \text{pour } t < -1 \text{ ou } t > 1 \end{array}$$

On pose enfin : $u_0 = 1$ et pour tout n entier naturel non nul :

$$u_n = \frac{4}{\pi}\left[\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n+k}}{k}\right] + (-1)^n$$

1. Donner une expression simple de :
$$u_n + u_{n-1} \qquad \text{pour } n \geqslant 1$$
Cette expression est-elle vérifiée pour $(u_1 + u_0)$?

2. Déterminer la valeur de λ pour laquelle f_λ est une densité de probabilité.
On note f cette densité : représenter graphiquement f.

3. X est la variable aléatoire réelle de densité f.
Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

4. En calculant $[m_{n+2}(X) + m_n(X)]$, déduire l'expression de $m_n(X)$.
(Distinguer les cas : n pair et n impair).

EXERCICE 2

I

Pour tout élément x réel de l'intervalle $]-1, 1[$

1. Montrer que :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

2. Calculer, en fonction de x, la somme : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n x^n$.

3. Calculer, en fonction de x, la somme : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$.

II

1. Diagonaliser la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et en déduire M^n pour tout élément n entier naturel.

   (Rappel : $M^0 = I$)

2. Les suites u et v sont définies par :

$$\begin{aligned} u_0 &= 1 \\ v_0 &= 0 \end{aligned}$$

   et pour tout élément n entier naturel par :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{6}u_n + \frac{2}{6}v_n \\ v_{n+1} &= \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{6}v_n \end{aligned}$$

   En posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ pour tout élément n entier naturel, montrer que :

$$X_{n+1} = \frac{1}{6}X_n$$

   et en déduire la résolution des suites u et v.

III LES PIECES DU JEU :

Un joueur dispose d'un jeton, d'un dé (supposé parfait) et d'un disque divisé en quatre parties égales notées dans l'ordre et dans le sens trigonométrique : A, P, G et B

LE JEU

Le joueur place le jeton en A et lance le dé.
Il déplace le jeton dans le sens trigonométrique d'un nombre de quarts de cercle égal au nombre de points indiqué par le dé.
Si le jeton arrive en G (en P), le joueur a gagné (perdu) et le jeu s'arrête.
Si le jeton arrive en A ou en B, le joueur relance le dé et fait tourner le jeton à partir de l'endroit où celui-ci se trouvait (A ou B)
La partie est d'ordre n ($n \in \mathbb{N}$) si le jeu s'arrête au lancer numéro n.

NOTATIONS

X et Y étant des évènements quelconques, on note :

	$P_Y(X)$	la probabilité partielle de X conditionnée par Y
et	$P(X)$	la probabilité totale de X

EVENEMENTS ET PROBABILITES

A_n : le jeton arrive en A au lancer numéro n

$$a_n = P(A_n) \text{ et } a_0 = 1$$

B_n : le jeton arrive en B au lancer numéro n

$$b_n = P(B_n) \text{ et } b_0 = 0$$

G_n : le joueur gagne la partie au lancer numéro n

$$g_n = P(G_n) \text{ et } g_0 = 0$$

g est la probabilité de gagner.
P_n : le joueur perd la partie au lancer numéro n

$$p_n = P(P_n) \text{ et } p_0 = 0$$

p est la probabilité de perdre.
T est la variable aléatoire définie par :

$$\begin{array}{ll} T = n, & \text{la partie s'arrête au lancer } n \\ t_n = P(T = n), & t_0 = 0 \text{ et } t = \lim\limits_{n \to +\infty} t_n. \end{array}$$

QUESTIONS

1. Calculer les probabilités :

$$P(A_{n+1}), \quad P(B_{n+1}) \text{ en fonction de } P(A_n) \text{ et } P(B_n)$$

2. En déduire $P(A_n)$ et $P(B_n)$ en fonction de n.
3. Calculer $P(G_{n+1})$, $P(P_{n+1})$ et $P(T = n + 1)$ en fonction de $P(A_n)$ et $P(B_n)$.
4. En déduire $P(G_n)$, $P(P_n)$ et $P(T = n)$ en fonction de n.
5. Calculer : g, p et t.
6. Quelle est la durée moyenne du jeu ?
   Calculer l'écart-type de T.