ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE COMPIEGNE
CONCOURS D'ADMISSION 1989
Option économique
MATHEMATIQUES I

CONVENTIONS

n et k sont des entiers naturels tels que : $0 \leqslant k \leqslant n$.

1. (a) La fonction f est définie par : $f(x) = \dfrac{x-6}{x-4}$ où x est différent de 4.
   (b) $f^{(k)}(x)$ est la dérivée d'ordre k de f.
   On conserve les notations classiques :
   $$f^{(0)}(x) = f(x), \quad f^{(1)}(x) = f'(x), \quad f^{(2)}(x) = f''(x), \quad f^{(3)}(x) = f'''(x)$$
   (c) $S_n(x)$ est la série entière de terme général : $\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$.
   On a donc $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$
   Dans le cas où $S_n(x)$ est absolument convergente, on note $S(x)$ sa limite, soit
   $$S(x) = \lim_{n \to +\infty} S_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

2. On définit les suites réelles u et v par leur premier terme u_0 et par la relation de récurrence :
   $$u_{n+1} = \frac{u_n - 6}{u_n - 4}$$
   L'ensemble des valeurs u_n telles que $u_n \neq 4$ pour tout n, est noté D.
   On écrit dans ce cas $u_0 \in D$ ou $u \in D$.

3. On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$
   On note $A^{n+1} = A^n.A$ avec $A^0 = I$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

PARTIE 1 :

1. Calculer $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$.
2. Déterminer l'expression générale de $f^{(k)}(x)$.
   Cette formule est-elle valable pour tout valeur de k ?
3. Calculer $S_n(x)$ en fonction de n et de x.
4. Pour quelles valeurs de x, la série $S_n(x)$ est-elle absolument convergente ?
   Donner dans ce cas $S(x)$.
   Quelle remarque peut-on faire ?

PARTIE 2 :

1. On donne $u_0 = \dfrac{46}{15}$
   Calculer u_1, u_2, u_3.
   Quelle remarque peut-on faire sur u ?
   On suppose $u \in D$.

2. Montrer que f conserve la monotonie de la suite u.

3. Pour quelles valeurs de u_0, la suite u est-elle :
   constante ?
   croissante ?
   décroissante ?

4. On donne $u_0 = 1$
   Calculer u_1, u_2, u_3
   Montrer que $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
   La suite u est-elle convergente ?
   Quelle est la limite dans ce cas ?

PARTIE 3 :

$u \in D$, $u_0 \neq 2$ et $u_0 \neq 3$
On pose $u_n = \dfrac{2v_n + 3}{v_n + 1}$

1. Démontrer que v est une suite géométrique. On donnera sa raison q et son premier terme v_0 exprimer en fonction de u_0.

2. Résoudre v puis u.

3. Vérifier que $u_0 = 1$ en calculant directement u_1, u_2, u_3 et la limite de u.

PARTIE 4 :

1. Déterminer toutes les valeurs u_0 telles que $u_n = 4$.

2. En déduire D

3. Vérifications :

   (a) Etudier le cas $u_0 = \dfrac{46}{15}$

   (b) Pour $u_0 = 1$, peut-on affirmer que $u \in D$?

PARTIE 5 :

1. Calculer A^2

2. Déterminer les matrices M telles que $M^2 = A^2$

3. Exprimer A^2 en fonction de A et I

4. Montrer que A^n peut s'écrire sous la forme $\alpha_n A + \beta_n I$ où α_n et β_n sont les termes généraux de deux suites α et β.
   Exprimer α_{n+1} et β_{n+1} en fonction de α_n et β_n.

5. Résoudre les suites α et β et en déduire l'expression de A^n en fonction de A, I et n.

PARTIE 6 :

Etablir un lien entre la résolution de la suite u et le calcul de A^n.