ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE COMPIEGNE
CONCOURS D'ADMISSION 1989
Option économique
MATHEMATIQUES I

EXERCICE

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère les n inconnues réelles : x_1, x_2, ..., x_n.
On pose : $x_k = S_n - k$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$
et : $S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$

1. Pour $n = 3$, calculer x_1, x_2 et x_3.
2. Calculer S_n en fonction de n.
3. En déduire la valeur de x_k en fonction de n et k.
4. Vérifier le cas $n = 3$.
5. Pour quelle valeur de n a-t-on $x_n = -\dfrac{9}{5}$?

PROBLEME

NOTATIONS

1. Le plan P est rapporté au repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ avec $\left\|\overrightarrow{i}\right\| = \left\|\overrightarrow{j}\right\| = 1$ cm.
   Pour x et y réels, on pose :
   $$\varphi(x, y) = y^2 - 2(x+1)y + x^2 - 2x + 9$$
   On note Γ la courbe représentative de $\varphi(x, y) = 0$
2. E est l'ensemble des suites définies par :
   $$u, \text{ réel et } \varphi(u_n, u_{n-1}) = 0 \text{ avec } n \text{ entier naturel.}$$
3. On rappelle que $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
   On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} x+1 & x-2 \\ 4 & x+1 \end{pmatrix}$ pour x réel, $x \geqslant 2$.
   Les puissances de A sont notées : A^n pour n entier naturel avec la convention : $A^0 = I$.
   On a $\varphi(x, A) = A^2 - 2(x+1)A + (x^2 - 2x + 9)I$

PARTIE 1

Dans cette partie, on considère l'équation $\varphi(x, y) = 0$ où y est l'inconnue et x un paramètre.
Les racines, quand elles existent dans $\mathbb{R}$ sont notées :

$$y = f_1(x) \qquad \text{et} \qquad y = f_2(x)$$

1. Pour quelles valeurs de x a-t-on deux racines réelles ?
   Donner dans ce cas leurs expressions.

2. Montrer que, si $x \geqslant 2$, alors $f_1(x) \geqslant 2$ et $f_2(x) > 2$.

3. Montrer que, si $x \geqslant 3$, alors $f_1(x) \leqslant x \leqslant f_2(x)$.

PARTIE 2

1. Montrer que $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$
   Que peut-on en conclure pour la courbe Γ ?

2. Etudier les variations de f_1 et f_2.
   Tracer les courbes correspondantes C_1 et C_2 sur le même graphique.

3. Que représente Γ par rapport à C_1 et C_2 ?

4. En posant $Y = x - 2$ et $X = y - x - 1$ dans $\varphi(x, y) = 0$
   Calculer Y en fonction de X. En déduire la nature de Γ.

5. Calculer l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ du domaine plan limité par Γ et les droites d'équation $x = 2$ et $x = \lambda$ ($\lambda \geqslant 2$)

6. Pour quelle valeur de λ a-t-on $\mathcal{A}(\lambda) = \dfrac{8}{3}$ cm^2 ?

PARTIE 3

1. Montrer qu'il existe une suite constante dans E.

Pour les questions suivantes, on prend $u_0 = 2$.

2. Calculer les différentes valeurs de u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.

3. Déterminer les réels a et b pour que la suite u définie par :

$$u_n = a + b(-1)^n$$

   soit une suite de E.

4. Déterminer les réels a, b et c pour que la suite u définie par :

$$u_n = an^2 + bn - c$$

   soit une suite de E.

5. Démontrer que la contrainte $u_{n+1} \geqslant u_n$ implique l'unicité de la suite u.
   Quelle est dans ce cas l'expression de u_n en fonction de n ?

6. On pose $u_n = (v_n)^2 - 2$.
   Déterminer les relations de récurrence entre v_{n+1} et v_n.

7. Résoudre les suites v et en déduire l'expression de u_n en fonction de n.

PARTIE 4

1. Calculer $\varphi(x, A)$.

2. En déduire que $A^n = \alpha_n(x)A + \beta_n(x)I$ où $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sont deux suites.

3. Exprimer $\alpha_{n+1}(x)$ et $\beta_{n+1}(x)$ en fonction de $\alpha_n(x)$ et $\beta_n(x)$.

4. Calculer $\alpha_0(x)$, $\alpha_1(x)$, $\beta_0(x)$ et $\beta_1(x)$.

5. Résoudre les suites $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ et en déduire l'expression générale de A^n.