ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE COMPIEGNE
CONCOURS D'ADMISSION 1989
toutes options : (économique, générale, technologique)
MATHEMATIQUES II

PROBLEME N° 1.

CONVENTIONS

Ω est l'ensemble des nombres entiers naturels formés de quatre chiffres pris parmi 1, 2, 3, 4 et 5.
A est le sous-ensemble de Ω des nombres a quatre chiffres différents
B est le sous-ensemble de Ω des nombres contenant exactement un chiffre doublé (une paire)
C est le sous-ensemble de Ω des nombres contenant exactement deux chiffres doublés (deux paires)
D est le sous-ensemble de Ω des nombres contenant un chiffre triplé (un brelan)
E est le sous-ensemble de Ω des nombres formés de quatre fois le même chiffre (un carré).
Chaque nombre de Ω est inscrit sur un jeton. Tous les jetons (de même forme) sont placés dans une urne.
On tire un au hasard.
Les variables aléatoires réelles X et Y sont définies par :
$X = k$: le plus grand des chiffres du nombre inscrit sur le jeton est k.
$Y = h$: le plus petit des chiffres du nombre inscrit sur le jeton est h.
La probabilité de l'évènement $X = k$ est noté $P(X = k)$
L'espérance mathématique de X est notée $E(X)$ et sa variance $V(X)$.
Pour l'analyse combinatoire, on ne tiendra pas compte des calculs inachevés.
Les probabilités seront présentées sous forme de fractions de même dénominateur.

PARTIE 1

1. Calculer le cardinal de
   (a) Ω
   (b) A, B, C, D et E
2. Quelle remarque peut-on faire ?
3. On additionne tous les nombre de Ω.
   Quel est le résultat de cette addition ?

PARTIE 2

1. Donner la loi de probabilité de X.
   Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
2. Donner la loi de probabilité de Y.
   Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$

PARTIE 3

1. Donner la loi de probabilité du couple (X, Y).
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes en probabilité ?

3. Donner la loi de probabilité conditionnelle de la variable X sachant $Y = 3$.
   Calculer les espérance mathématique et la variance conditionnelle notée :

$$E_{Y=3}(X) \qquad \text{et} \qquad V_{Y=3}(X)$$

PROBLEME N° 2

CONVENTIONS

1. Soit X la variable aléatoire réelle de densité f. Pour a et b réels, la probabilité d'avoir $a \leqslant X \leqslant b$ est notée : $P(a \leqslant X \leqslant b)$.
   P est la fonction de répartition de X, définie par :

$$F(X) = P(X \leqslant x)$$

   Pour n entier naturel, $\mathfrak{M}_n(X)$ est le moment non centré, d'ordre n défini par :

$$\mathfrak{M}_n(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t)dt$$

   $E(X)$ est l'espérance mathématique et $V(X)$ la variance de X.

2. ln est la fonction logarithme népérien de base e.
   On rappelle la notation : $\ln^2 t = (\ln t)^2$.
   On considère les intégrales :

$$I_n = \int_1^e t^n \ln t dt \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_1^e t^n \ln^2 t dt.$$

3. Le plan est rapporté à un repère orthonormé.
   Soit λ un réel et la fonction numérique de la variable t, définie par :

$$\begin{cases} f(t) = & \lambda \dfrac{(\ln t)(1 - \ln t)}{t} \quad \text{pour } t \in [1, e] \\ f(t) = & 0 \quad \text{pour } t \in]-\infty, 1[\cup]e, +\infty[\end{cases}$$

   On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

PARTIE 1

1. Calculer I_n.
2. Exprimer J_n en fonction de I_n.
3. En déduire la valeur de J_n.

PARTIE 2

1. Pour quelle valeur de λ, f est-elle une densité de probabilité ?
2. Représenter dans ce cas $\mathcal{C}_f$.
3. Calculer $P(0 \leqslant X \leqslant 1)$.

PARTIE 3

1. Donner l'expression de F et représenter graphiquement $\mathcal{C}_f$.
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
3. Donner l'expression de $\mathfrak{M}_n(X)$