# ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE COMPIEGNE
# CONCOURS D'ADMISSION 1989
# Option générale
# MATHEMATIQUES I

## DEFINITIONS

1. On donne le système d'équations :

$$\begin{cases} (x-1)(x+2)+yz & =0 \quad (1) \\ (x+t+1)y & =0 \quad (2) \\ (x+t+1)z & =0 \quad (3) \\ (t-1)(t+2)+yz & =0 \quad (4) \end{cases}$$

   où $x$, $y$, $z$ et $t$ sont des inconnues réelles.
   Les solutions de ce système seront présentées sous forme de matrices du type :

$$M = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$$

   - On note $S$ l'ensemble des matrices solutions et $M^n$ les puissances de $M$ avec $n$ entier naturel.
   - Pour $M \neq 0$, on rappelle que $M^0 = I$ avec

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   - On donne $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -10 & -4 \end{pmatrix}$

2. La suite $u$ est définie par : $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$
   et pour tout $n$ entier naturel par : $u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n = 0$

3. Pour $n$ et $p$ entiers naturels, les coefficients $K_n^p$ sont définis par :

$$K_n^0 = 1$$
$$K_{n+1}^p = K_n^{p-2} + K_n^{p-1} \quad \text{pour } 0 \leqslant p \leqslant 2n$$

   avec la convention $K_n^p = 0$ pour $p > 2n$ ou $p < 0$.

4. Pour $n$ entier naturel, les polynômes $P_n$ de la variable réelle $x$ sont définis par :

$$P_n(x) = \sum_{p=0}^{2n} K_n^p x^p$$

   En écrivant $P_n(x)$ suivant les puissances de $(x-1)$, on définit les coefficients $M_n^p$ à l'aide de

$$P_n(x) = \sum_{p=0}^{2n} M_n^p (x-1)^p$$

5. Pour $n$ entier naturel, on note l'intégrale :

$$I_n = \int_{-2}^{1} (x^2+x-2)^n dx$$

## PARTIE 1

1. Calculer les termes $u_2$, $u_3$ et $u_4$ de la suite $u$.
2. Montrer que cette suite est définie et unique.
3. Résoudre la suite $u$.

## PARTIE 2

1. Résoudre le système d'équations dans le cas particulier :
$$x + t + 1 \neq 0.$$
2. Lorsque $x + t + 1 = 0$, résoudre le système pour :
   (a) $y = 0$
   (b) $z = 0$
   (c) $y \neq 0$ et $z \neq 0$.
3. En déduire l'ensemble $S$ des matrices $M$, solutions du système.
4. Pour $M$ élément de $S$, calculer $M^2 + M - 2I = 0 \quad (1)$
5. Montrer que $A$ est élément de $S$.
6. En utilisant la relation (1), montrer que $A^n$ peut s'écrire sous la forme $\alpha_n A + \beta_n I$, où $\alpha_n$ et $\beta_n$ sont les termes généraux de deux suites réelles $\alpha$ et $\beta$.
7. Calculer $\alpha_0$ et $\alpha_1$.
   Déterminer une relation de récurrence entre $\alpha_{n+2}$, $\alpha_{n+1}$ et $\alpha_n$.
8. En déduire l'expression de $A^n$ en fonction de $A$, $I$ et $n$.

## PARTIE 3

1. Calculer les coefficients $K_n^p$ pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.
2. Calculer la somme : $\sum\limits_{p=0}^{2n} K_n^p$.
3. Calculer $P_n(1)$ et $P_n(-2)$.
4. Pour $x \neq 1$ et $x \neq -2$, exprimer $P_{n+1}(x)$ en fonction de $P_n(x)$ et $x$.
5. Montrer que la suite de polynômes $P_n$ est géométrique.
6. Exprimer $P_n$ en fonction de $x$ et $n$.
7. Calculer les coefficients $M_n^p$ en fonction de $n$ et $p$.

## PARTIE 4

1. Déterminer les constantes $a$, $b$ et $c$ telles que, pour $x$ réel :
$$2x^2 + x = a(x^2 + x - 2) + b(2x + 1) + c$$
2. Calculer $I_0$ et $I_1$.
3. Par une intégration par parties, déterminer une relation de récurrence entre $I_{n+1}$ et $I_n$.
4. En déduire l'expression de $I_n$ en fonction de $n$.
5. Calculer la limite de $\dfrac{C_{2n}^n I_n}{3^{2n+1}}$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

## PARTIE 5

On considère la série de terme général $P_n(x)$.

1. Pour quelles valeurs de $x$ cette série est-elle convergente ?
2. Calculer dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x) = S(x)$$