ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE COMPIEGNE
CONCOURS D'ADMISSION 1990
Option économique et technologique
MATHEMATIQUES I

PREMIERE PARTIE

Pour λ élément de $\mathbb{R}$, on note f_λ la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f_\lambda(x) = (\lambda - 1)3^{-x} + 1$$

$\mathcal{C}_\lambda$ est sa courbe représentative (repère orthonormé).

1. Etudier suivant les valeurs de λ, les variations de f.
2. Représenter sur le même graphique : C_0, C_1 et C_2.
   Pour $\lambda \neq 1$ et n fixé, on pose $v_n = f_\lambda(n)$.
3. Démontrer l'existence d'un réel a tel que :
   $$n < a < n+1 \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} - v_n = f'_\lambda(a).$$
4. Calculer a.
5. Quel est le lieu des points de $\mathcal{C}_\lambda$ d'abscisse a quand λ varie ?

DEUXIEME PARTIE

n et k sont des éléments de $\mathbb{N}$, $0 \leqslant k \leqslant n$.
E est l'ensemble des suites définies par la relation de récurrence :

$$3u_{n+1} - u_n = 2 \text{ et } u_0 \text{ donné.}$$

Pour u élément de E.

1. Démontrer que, pour u_0 donné dans $\mathbb{R}$, la suite u est définie et unique.
2. Pour quelle valeur de u_0, la suite u est-elle constante ?
3. (a) Quelle est la condition nécessaire sur u_0 pour que la suite u soit croissante ?
   (b) Cette condition est-elle suffisante ?
   (c) Montrer que dans ce cas, on a : $u_n < 1$.
   (d) En déduire que la suite u est convergente.
   (e) Quelle est sa limite ?
4. (a) Quelle est la condition nécessaire sur u_0 pour que la suite u soit décroissante ?
   (b) Cette condition est-elle suffisante ?
   (c) Montrer que dans ce cas, on a : $u_n > 1$.
   (d) En déduire que la suite u est convergente.
   (e) Quelle est sa limite ?
5. Pour k élément de $\mathbb{N}$, écrire u_{n+k} en fonction de n, k et u_n.
6. En déduire l'expression de u_n en fonction de u_0 et n.

TROISIEME PARTIE

On donne les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -5 & -4 \\ -7 & 7 & 4 \\ 21 & -15 & -10 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

On définit la suite matricielle A par la relation de récurrence :

$$3A_{n+1} - A_n = 2I$$

1. Calculer A_1 et A_2.
2. Exprimer A_n en fonction de A_0, I et n.
3. Calculer $A_0.M$
4. En déduire que $A_n.M = t_n.M$ où t_n est un réel à déterminer en fonction de n.
5. Calculer : $[3^n A_n - (1 + 3^n)I]^2$.

QUATRIEME PARTIE

$(X, P(X))$ est une loi de probabilité.
On note $P(X = n)$ la probabilité d'avoir $X = n$, $n \in \mathbb{N}$.
On pose : $P(X = n) = u_n - 1$.

1. Quelle est la valeur de u_0 ?
2. Expliciter la loi de probabilité $(X, P(X))$.
3. Calculer $E(X)$.