ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE COMPIEGNE
CONCOURS D'ADMISSION 1991
Option générale
MATHEMATIQUES I

EXERCICE N° 1

PARTIE 1

x est un réel, n un entier naturel.
La suite (P_n) de polynômes est définie par :

$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = 2(x+1)$$

et pour $n \geqslant 2$, la relation de récurrence -notée (R)-

$$P_n(x) - 2(x+1)P_{n-1}(x) + (x^2 + 2x + 2)P_{n-2}(x) = 0$$

1. Calculer $P_2(x)$

2. Démontrer que la suite (α_n) définie par :

$$\alpha_n(x) = (x + 1 - i)^{n+1}$$

   vérifie la relation (R).
   (rappel : $i \in \mathbb{C}$, $i^2 = -1$)

3. On pose $\beta_n(x) = P_n(x) + \dfrac{1}{2i}\alpha_n(x)$.
   Démontrer que (β_n) est une suite géométrique.

4. En déduire que :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{2k \leqslant n} C_{n+1}^{2k+1}(-1)^k(x+1)^{n-2k}$$

PARTIE 2

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$$

$f^{(n)}(x)$ est la dérivée de $f(x)$ d'ordre n. $f^{(0)}(x) = f(x)$.

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ (dérivée première et seconde).

2. Démontrer, pour $n \geqslant 2$, la relation :

$$(x^2 + 2x + 2)f^{(n)}(x) + 2n(x+1)f^{(n-1)}(x) + n(n-1)f^{(n-2)}(x) = 0$$

PARTIE 3

On se propose de démontrer que :

$$f^{(n)}(x) = \frac{Q_n(x)}{(x^2+2x+2)^{n+1}}$$

où $Q_n(x)$ est un polynôme de degré au plus n.

- Donner les expressions de $Q_0(x)$, $Q_1(x)$ et $Q_2(x)$.
- Démontrer que : $f^{(n)}(x) = \dfrac{Q_n(x)}{(x^2+2x+2)^{n+1}}$
- Donner l'expression de $Q_n(x)$ en fonction de $Q_{n-1}(x)$, $Q_{n-2}(x)$, n et x $(n \geqslant 2)$.

PARTIE 4

1. Etablir la relation entre $P_n(x)$ et $Q_n(x)$.
2. En déduire l'expression de $Q_n(x)$.

EXERCICE N° 2

PARTIE 1

Les réels x et t vérifient les inégalités : $x \geqslant t > 1$.

1. Démontrer que :$\dfrac{2t}{1+t^2} > \dfrac{1}{t}$.
2. En déduire que :
$$\int_1^x \frac{2t}{1+t^2} > \ln x$$
3. En posant : $I(x) = \int_1^x \dfrac{2t}{1+t^2} dt$ (ln : logarithme népérien).
   Calculer la limite de $I(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
4. L'écriture $\int_0^{+\infty} \dfrac{2t}{1+t^2} dt$ a-t-elle un sens ?

PARTIE 2

1. Démontrer qu'il existe un réel λ strictement positif tel que :
$$\text{pour } t > A\text{, on ait : } t\sqrt{t} < 1+t^2$$
2. En déduire que, pour $x \geqslant A$: $\int_A^x \dfrac{dt}{1+t^2} < \dfrac{2}{\sqrt{A}}$.
3. En posant $J(x) = \int_A^{+\infty} \dfrac{dt}{1+t^2}$, démontrer que J est croissante et majorée.
4. L'écriture : $J = \int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{1+t^2}$ a-t-elle un sens ?
5. Montrer que $J = \dfrac{\pi}{2}$?

PARTIE 3

Pour λ réel, la famille de fonctions f_λ est définie par :

$$f_\lambda(t) = \begin{cases} 0 & t \in]-\infty, 0[\\ \dfrac{\lambda}{1+t^2} & t \in [0, +\infty[\end{cases}$$

1. Déterminer λ pour que f_λ soit une densité de probabilité.
   On note f cette densité de probabilité et $\mathcal{C}_f$ sa courbe.
2. Représenter graphiquement $\mathcal{C}_f$ (repère orthonormé)
   Soit X la variable aléatoire de densité f.
3. Calculer la probabilité : $P(-1 \leqslant X \leqslant 1)$.
4. Que peut-on dire de l'espérance mathématique de X ?
5. Donner l'expression de la fonction de répartition F de X.
6. Représenter graphiquement la courbe $\mathcal{C}_f$ de F (repère orthonormé)