ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE COMPIEGNE

CONCOURS D'ADMISSION 1991

Option économique et technologique

MATHEMATIQUES I

EXERCICE N° 1

La fonction numérique f de la variable réelle t est définie par son équation :

$$f(t) = \frac{1}{t^2 + 2 + 2}$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé

PARTIE 1

1. Quel est le domaine de définition de f ?

2. Calculer $f(-2 - t) - f(t)$.
   Conclusion pour $\mathcal{C}$.

3. Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-2-x}^{x} f(t)dt = 2 \int_{-1}^{x} f(t)dt$$

4. Calculer les dérivées première et seconde de f, notées f' et f''.

5. Calculer :

$$(t^2 + t + 2)f''(t) + 4(t + 1)f'(t) + 2f(t)$$

PARTIE 2

1. Donner les trois premiers termes du développement limité de f, pour t voisin de 0.

2. Soit M le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $t = 0$. Donner l'équation de la tangente en M à $\mathcal{C}$ et la position de $\mathcal{C}$ par rapport à celle-ci.

3. Etudier les variations de f et représenter graphiquement $\mathcal{C}$.

4. Soit φ la restriction de f à $D = [-1, +\infty[$.
   Quel est l'espace-image $\varphi(D)$ correspondant ?

5. Montrer que l'application φ de D dans $\varphi(D)$ est une bijection.

6. Donner l'expression de la fonction réciproque.

PARTIE 3

1. Calculer la limite de $\dfrac{t^{3/2}}{t^2+2t+2}$ lorsque t tend vers $+\infty$.
2. En déduire qu'il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout $t > A$:
$$\frac{1}{t^2+2t+2} < \frac{1}{t^{3/2}}$$
3. On note : $F(x) = \int\limits_A^x f(t)dt$.
   Démontrer que, pour $x \geqslant A$, $F(x) \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{A}}$.
4. Montrer que F est une fonction croissante de x.
5. En déduire que $F(x)$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

PARTIE 4

$$I = \int_{-1}^{+\infty} f(t)dt \qquad \text{et} \qquad J = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$$

1. Démontrer que les intégrales I et J sont convergentes.
2. Calculer I et J.
   On rappelle que $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dt}{1+t^2} = \dfrac{\pi}{2}$.

EXERCICE N° 2

PARTIE 1

Pour n entier naturel

1. Développer $f(x) = (x+1)^n$ en utilisant la formule du binôme de Newton.
2. En déduire l'expression de : $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k$.
3. Utiliser la dérivée première de f pour calculer : $\sum\limits_{k=0}^{n} kC_n^k$.
4. Utiliser la dérivée seconde f'' de f pour calculer : $\sum\limits_{k=0}^{n} k(k-1)C_n^k$
5. Déduire des troisième et quatrième question la somme : $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2C_n^k$.
   Rappel : $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

PARTIE 2

Pour n et k entiers naturels, les coefficients $u_{n,k}$ sont définis par :

$$\begin{array}{lll} u_{n,0} = \dfrac{1}{2^n} & u_{n,k} = \dfrac{n}{2k}.u_{n-1,k-1} & \text{pour } 0 < k \leqslant n \\ \text{et} & u_{n,k} = 0 & \text{pour } k > n \end{array}$$

1. Calculer les coefficients $u_{n,k}$ pour $n = 0$, 1, 2, et 3.
   Les présenter dans un tableau.

2. Exprimer $u_{n,k}$ en fonction de n, k et $u_{n-k,0}$.

3. En déduire l'expression de $u_{n,k}$.

PARTIE 3

Pour x réel et n entier naturel, la suite de polynômes P est définie par :

$$P_0(x) = 1, \qquad P_n(0) = \frac{1}{2^n} \qquad \text{et} \qquad P'_{n+1}(x) = \frac{n+1}{2}.P_n(x)$$

où P'_{n+1} est le polynôme dérivée de $P_{n+1}(x)$.

1. Déterminer $P_1(x)$, $P_2(x)$ et $P_3(x)$.

2. Démontrer que $P_n(x)$ est défini, unique et de degré n.

3. En écrivant : $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n,k}x^k$, exprimer les coefficients de $P_{n+1}(x)$ en fonction des coefficients de $P_n(x)$.

4. Expliciter $P_n(x)$.

PARTIE 4

Etude d'une loi de probabilité pour n entier naturel.
On donne $X(\Omega) = \{0, 1, ..., n\}$ et pour $k \in X(\Omega) : P(X = k) = \dfrac{C_n^k}{2^n}$.

1. Montrer que $(X, P(X))$ est une loi de probabilité.

2. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

3. La fonction génératrice de X, notée G_X est définie par :

$$x \in \mathbb{R}, \qquad G_X(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k.P(X = k)$$

   Donner l'expression de $G_X(x)$.

PARTIE 5

Des primes

La société ABC emploie 10 agents dont 4 cadres. Elle se propose de distribuer, d'une manière aléatoire, une prime à un nombre quelconque de ses agents (de 0 à 10 primes)

1. Déterminer le référentiel Ω correspondant à cette distribution et son cardinal.

2. Quelle est la probabilité que cette prime soit distribuée à n agents ? (n variant de 0 à 10)

3. X est le nombre de cadre(s) ayant reçu la prime. (X varie de 0 à 4)
   Déterminer la loi de probabilité $(X, P(X))$

4. Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.