ESCO 1990 Option économique

EXERCICE N° 1

Dans les questions 3.b) et 4., les résultats seront arrondis à 10^{-3} près au plus proche. Les résultats intermédiaires figureront dans un tableau et les calculs suivants seront effectués à partir de ces valeurs.
Les formules utilisées devront être citées.

Le tableau suivant donne les indices des prix à la consommation (x_i) et des revenus horaires (y_i) en Islande par rapport à l'année 1980

Année	1981	1982	1983	1984	1985	1986
Indice des prix à la consommation (x_i)	150,6	224,7	418,2	547,0	721,8	881,9
Indice des revenus horaires (y_i)	152,7	228,5	339,0	403,2	531,6	667,7

1. (a) Dans chaque colonne, calculer les taux annuels d'augmentation. Quelle a été l'année la plus "dure" pour les Islandais ?
   (b) Calculer le taux annuel moyen d'augmentation des revenus entre 80 et 86.
2. Calculer l'indice 1987 des prix à la consommation sachant que le taux annuel d'augmentation entre 1986 et 1987 a été de 14,08 %
3. (a) Représenter sur papier semi-logarithmique le nuage de points $M_i(t_i, x_i)$ pour $i \in \{1, 2, .., 6\}$ où t_i est le rang de l'année (le rang t_j de l'année 1983 par exemple est 3)
   (b) On pose $v_i = \log x_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 6)$
   Calculer le coefficient de corrélation de la série double (T, V).
   Déterminer par la méthode des moindres carrés la droite de régression de V en T et tracer cette droite sur le graphique.
   (c) En déduire un ajustement de X en fonction de T et déterminer la valeur que l'on obtiendrait par cet ajustement pour l'indice 1987 des prix à la consommation. Comparer avec 2.
4. On pose $w_i = \log y_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 6)$
   Déterminer la droite de régression de W en V par la méthode des moindres carrés. En déduire un ajustement de Y en X.
   Quel serait alors l'indice des revenus en 1987. (l'indice des prix étant celui trouvé au 2.) ?
   Quel indice des revenus obtiendrait-on si on considérait que le taux d'augmentation des revenus entre 1986 et 1987 était le taux annuel moyen obtenu en 1.b) ?
   Comparer et interpréter

EXERCICE N° 2

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

1. (a) Montrer que A est inversible et calculer son inverse par la méthode du pivot de Gauss.

(b) En déduire que le système (S)

$$(S) : \begin{cases} -x+y+z+t=a \\ 2x+z+t=b \\ 5x-3y+z+t=c \end{cases}$$

admet une infinité de solutions quels que soient les réels a, b, c.

2. On pose $b=2$, $c=5$; Soit (x,y,z,t) une solution du système.
Exprimer x, y et z en fonction de t et de a.
L'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$: $(a,t) \mapsto (x,y,z)$ est-elle linéaire ?

3. (a) Déterminer graphiquement l'ensemble des couples (a,t) satisfaisant aux conditions :
   i. $3a+8t-3 \geqslant 0$
   ii. $3a-t+3 \geqslant 0$
   iii. $-3a-4t+15 \geqslant 0$
   iv. $t \geqslant 0$

   (b) Pour quelles valeurs du paramètre a, le système (S) admet-il des solutions vérifiant les conditions :
   i. $x \leqslant 0$
   ii. $z \geqslant 0$
   iii. $2x-y+1 \geqslant 0$
   iv. $t \geqslant 0$

4. Soit $B(x,y,z,t) = z-(x+y+t)$

   (a) Pour a fixé, déterminer t en fonction de a pour que B soit maximum et que les conditions du 3.b) soient satisfaites.

   (b) Déterminer a et t tels que B soit maximum et que les conditions du 3.b) soient satisfaites.

EXERCICE N° 3

Objectif : étude de l'équation $[e^{nx} = n(x+1)] : (E_n)$, pour $n \in \mathbb{N}$.

I. On note $f_n : x \mapsto e^{nx} - (x+1) \times n$.

   (1) Etudier les variations de f_n pour $n \in \mathbb{N}$. Construire le tableau de variations (en précisant les limites) et en déduire, selon les valeurs de n, le nombre de solutions de (E_n).

   (2) On note (C_n) la courbe représentant f_n dans un plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Etudier les branches infinies de (C_n).
   Construire dans un même repère (C_0), (C_1) et (C_2).

   (3) Soit $\alpha < 0$. On note $\mathcal{A}_n(\alpha)$ l'aire du domaine limité par (C_n), la droite Δ_n d'équation $y=-nx-n$, les droites $x=\alpha$ et $x=0$.
   Calculer $\mathcal{A}_n(\alpha)$ puis $\lim\limits_{\alpha \to -\infty} \mathcal{A}_n(\alpha) = A_n$, lorsque cette limite existe.
   Que peut-on dire de A_n lorsque n tend vers $+\infty$? Interpréter graphiquement ce résultat.

II. On s'intéresse ici au cas $n=2$ et on cherche une valeur approchée de la solution α_2 positive de E_2.

   (1) Vérifier que $\alpha_2 \in [0,1]$

   (2) Soit $u \in \mathbb{R}^{\times}$. On note T_u la tangente à (C_2) au point d'abscisse u et $g(u)$ l'abscisse du point d'intersection de T_u à Ox.
   a. Montrer que $g(u) = u - \dfrac{f_2(u)}{f_2'(u)}$ (1)
   b. Etudier la position de T_u par rapport à (C_2).

c. Montrer que si $u > 0$, $g(u) \geqslant \alpha_2$. Utiliser (1) et b.

d. Montrer que si $u \geqslant \alpha_2$, $g(u) \leqslant u$.

(3) On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n - \dfrac{f_2(u)}{f_2'(u)} \quad \text{pour } n \geqslant 0 \end{cases}$$

a. Déduire de (2) que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha_2$.

b. En utilisant ce qui précède, réaliser un programme sur calculatrice pour déterminer une valeur approchée de α_2 avec la précision de cette calculatrice.
On indiquera l'algorithme utilisé; par exemple :

- en donnant le programme BASIC pour une calculatrice qui possède ce langage.
- ou bien en donnant des explications claires en français décrivant le programme.

Quelle remarque peut-on faire sur la vitesse de convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?