ESCO 1990 Option générale prime

PROBLEME

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x \exp(\frac{2x}{x^2-1}) \text{ si } x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$$

Soit C sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé.

1. (a) Etudier les éventuelles limites de f à gauche et à droite de 1.
   Peut-on prolonger f par continuité à gauche (resp. à droite) en 1 ?
   f est-elle alors dérivable à gauche (resp. à droite) en 1 ?

   (b) Mêmes questions en remplaçant 1 par -1.

2. (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$.

   (b) Montrer que :
   $$f'(x) = \exp\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)\frac{1}{(x^2-1)^2}P(x)$$
   où P est un polynôme de degré 4 que l'on explicitera.

   (c) Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que :
   $$P(x) = (x^2 - ax + 1)(x^2 - bx + 1)$$

   (d) En déduire les variations de f sur son domaine de définition.

3. Etudier les branches infinies de C. Préciser les asymptotes. On étudiera notamment la position de C par rapport à son asymptote oblique.

4. Tracer C. On donnera des valeurs approchées à 10^{-2} près des extrémums, et on déterminera la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

5. On considère la suite (u_n) définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geqslant 1$.

   (a) On suppose $u_0 > 1$.
   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. En déduire qu'elle diverge vers $+\infty$.

   (b) On suppose $0 \leqslant u_0 < 1$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Etudier sa convergence.

EXERCICE 1

Les calculs seront présentés sous forme de tableau : les nombres figurant dans ce tableau seront arrondis à 10^{-4} près au plus proche et les calculs effectués à partir de ces valeurs. Les formules utilisées devront être citées.
On considère le tableau suivant donnant le prix de vente y (en 10^4 francs) d'un véhicule d'occasion en fonction de son âge x (en années).

âge	1	2	3	4	5	6	7	8
prix	2,50	1,70	1,20	1,10	0,90	0,80	0,78	0,40

1. On pose $u = \log x$ (log signifiant logarithme décimal).
   Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre u et y.

2. Sur papier semi-logarithmique, représenter le nuage de points $M(x, y)$.

3. Déterminer une équation de la droite de régression de y en u, au sens des moindres carrés. Tracer cette droite sur le graphique précédent.

4. Donner une estimation du prix de vente d'un véhicule de 10 ans d'âge.

EXERCICE 2

On considère les matrices suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A = \frac{1}{4}B$$

1. (a) Montrer que $B^3 = 6B^2 - 8B$
   (b) En déduire une relation linéaire entre A^3, A^2 et A.

2. Montrer qu'il existe deux suites réelles $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^\times}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}^\times}$ telles que

$$A^k = a_k A^2 + b_k A \qquad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}^\times$$

3. (a) Déterminer deux réels α et β tels que :

$$a_{k+1} = \alpha a_k + \beta a_{k-1} \qquad \text{pour tout } k \geqslant 2.$$

   (b) Déterminer a_k en fonction de k.
   (c) En déduire A^k en fonction de k.