ESCO 1990 Option technologique

PARTIE I

On considère les matrices carrées d'ordre 3 :

$$A = \begin{pmatrix} \ln(\frac{2}{3}) & 0 & 0 \\ 1 & \ln(\frac{2}{3}) & 0 \\ 0 & 0 & -\ln 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(la notation ln désigne le logarithme népérien).

1. (a) Déterminer la matrice M telle que $A = M + N$
   (b) Calculer les puissances M^n et N^n pour tout entier $n \geqslant 2$.
   (c) Vérifier que $M \times N = N \times M$.
2. Déduire de la question 1., le calcul de A^n pour $n \geqslant 1$.
   On écrira clairement les neuf coefficients de la matrice A^n.

PARTIE II

Soient a, b, c des nombres réels.
On considère la fonction f qui, à tout réel x associe :

$$f(x) = \frac{(ax+b)2^x + c}{3^x}$$

On note $f^{(n)}$ la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f (et $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$)

1. On se propose de montrer dans cette question que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on peut trouver des réels a_n, b_n, c_n tels que $f^{(n)}(x)$ s'écrive pour tout réel x :

$$f^{(n)}(x) = \frac{(a_n x + b_n)2^x + c_n}{3^x} \qquad (1)$$

   (a) Calculer $f'(x)$.
   En déduire les expressions de a_1, b_1, c_1 en fonction de a, b, c.
   Ecrire les relations obtenues sous forme matricielle.
   (b) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, le réel $f^{(n)}(x)$ s'écrit sous la forme (1) et que les nombres a_n, b_n, c_n vérifient :

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$$

   où A est la matrice définie dans la partie I et $a_0 = a$, $b_0 = b$, $c_0 = c$.

2. (a) Calculre, en utilisant I.2), les nombres a_n, b_n, c_n en fonction de a, b, c et n.
   (b) En déduire l'expression de $f^{(n)}(1)$ en fonction de a, b, c et n.

(c) Déterminer les coefficients a, b, c pour lesquels la fonction f vérifie les trois conditions suivantes :

$$f(1) = 0, \qquad f'(1) = \frac{1}{3}\ln 4, \qquad f''(1) = \frac{2}{3}(\ln 2)(\ln \frac{2}{9})$$

3. On supose dans la suite de cette partie, que $a = 0$, $b = 1$ et $c = -2$.
   On appelle (C) la courbe représentative de f.

   (a) Etudier les variations de f.

   (b) Etudier les branches infinies de la courbe (C).

   (c) Montrer que la courbe (C) coupe l'axe des abscisses en un point unique de l'on déterminera.
   Ecrire une équation de la tangente à (C) en ce point.

   (d) Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion.
   Donner une valeur approchée, arrondie à 10^{-2} près, de ses coordonnées.

   (e) Construire la représentation graphique (C).

PARTIE III

Une urne contient 4 boules vertes et 12 boules blanches. On dispose par ailleurs d'une réserve de boules de chaque couleur.

On considère des tirages successifs d'une boule de l'urne. Après chaque tirage, on remet la boule dans l'urne et avec elle, 3 boules supplémentaires (prélevées dans la réserve) de la même couleur que la couleur tirée.

Exemple : si on tire une boule verte, on remettra 4 boules vertes dans l'urne.

Pour $n \geqslant 1$, on appelle X_n la variable aléatoire qui prend la valeur :

0 si on tire une boule verte au $n^{\text{ième}}$ tirage
1 si on tire une boule blanche au $n^{\text{ième}}$ tirage

On pose $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

1. Déterminer la loi de X_1 et calculer l'espérance $E(X_1)$ de X_1.

2. (a) Calculer les probabilités conditionnelles

$$P(X_2 = 0/X_1 = 0) \qquad \text{et} \qquad P(X_2 = 0/X_1 = 1)$$

   (b) En déduire la loi conjointe du couple (X_1, X_2) puis la loi de X_2. Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

3. (a) On a obtenu 2 boules blanches exactement lors des dix premiers tirages. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche au onzième tirage ?

   (b) Plus généralement, calculer pour $0 \leqslant k \leqslant n$, les probabilités

$$P(X_{n+1} = 1/S_n = k)$$

   en fonction de k et n.

   (c) En déduire que :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{12 + 3E(S_n)}{16 + 3n}$$

   (d) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a :

$$P(X_n = 1) = \frac{3}{4} \qquad \text{et} \qquad E(S_n) = \frac{3n}{4}$$