CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION GENERALE

MATHEMATIQUES I

Année 1978

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Dans ce problème, toutes les fonctions envisagées sont des fonctions d'une variable réelle x à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit F une telle fonction; on note, si elles existent :

$$\begin{aligned} F(x+0) &= \lim_{h\downarrow 0} F(x+h) \\ F(x-0) &= \lim_{h\downarrow 0} F(x-h) \end{aligned}$$

La notation $h \downarrow 0$ signifiant que h tend vers zéro par valeurs positives. On rappelle qu'une fonction F, définie au point x, est continue à gauche en x si et seulement si : $F(x) = F(x-0)$.

PARTIE I

On considère la fonction F définie par :

$$\begin{cases} F(x) = 0 & x \leqslant a \\ F(x) = \dfrac{x}{8} & a < x \leqslant b \\ F(x) = \dfrac{x^2}{16} & b < x \leqslant c \\ F(x) = 1 & c < x \end{cases}$$

a, b, c étant trois nombres réels satisfaisant à : $a < b < c$.

1. (a) Montrer que, quels que soient a, b et c, F est continue à gauche sur $\mathbb{R}$.
   (b) A quelles conditions doivent satisfaire a, b, c pour que F soit continue pour toutes valeurs de x ? Est-elle dérivable quel que soit x ?

2. Déterminer les conditions sur a, b, c pour que F soit non-décroissante; montrer que, si ces conditions sont réalisées, F peut alors être considérée comme la fonction de répartition d'une variable aléatoire X :

$$F(x) = P(X \leqslant x)$$

PARTIE II

Dans cette seconde partie, on pose $a = 0$, $b = 2$, $c = 4$. On note X la variable aléatoire ayant F pour fonction de répartition.

1. Etudier la fonction F et tracer sa représentation graphique.
2. Etudier la fonction F' dérivée de F par rapport à x.
3. En désignant par F'_g la dérivée à gauche de F, définie quel que soit x, on note f la fonction telle que :

$$\begin{cases} f(x) = F'(x) & \text{en toute valeur } x \text{ où } F' \text{ est définie} \\ f(x) = F'_g(x) & \text{pour tout valeur } x_i \text{ où } F' \text{ n'est pas définie} \end{cases}$$

   Montrer que f est continue à gauche, qu'elle est intégrable sur tout intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et que $F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^x f(t)dt$.
   La fonction f apparait ainsi, et on l'admettra, comme la fonction de densité de la variable aléatoire X.
4. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$ de X.
5. (a) Etudier la variation de la fonction G de la variable u définie dans $\mathbb{R}$ par :

$$G(u) = \int_0^u [1 - F(x)]dx$$

   (b) Montrer qu'il existe une valeur u_0 que l'on précisera, telle que $G(u) = E(X)$ pour $u \geqslant u_0$

PARTIE III

On suppose dans cette troisième partie que a, b, c satisfont aux conditions

$$\begin{cases} 0 < a < b \\ 2 < b < c < 4 \end{cases}$$

On pose $\{x_i\}$ l'ensemble des points x_i de discontinuité de la fonction F et $p_{x_i} = F(x_i + 0) - F(x_i - 0)$ le saut de la fonction F au point de discontinuité x_i.

1. (a) Expliciter les éléments de l'ensemble $\{x_i\}$.
   (b) Calculer toutes les valeurs p_{x_i}.
2. Soit Φ la fonction définie par $\Phi(x) = \sum\limits_{x_i < x} p_{x_i}.$, la sommation étant étendue à tous les points de discontinuité de F strictement inférieurs à x.
   Etudier la fonction Φ et tracer sa représentation graphique (on pourra, pour ce tracé seulement, choisir $a = 1$, $b = 2,5$, $c = 3$).
3. On note Ψ la fonction $\Psi = F - \Phi$.
   (a) Montrer que la fonction Ψ est continue et non décroissante.
   (b) Pour quelles valeurs de x, Ψ n'est-elle pas dérivable ?
4. Soit $\alpha = \lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x)$ et $\beta = \lim\limits_{x \to +\infty} \Psi(x)$.
   (a) Montrer que $\alpha \leqslant 1$ et $\beta \leqslant 1$.
   (b) Quelle relation existe-t-il entre α et β ?

5. (a) Montrer que l'on peut trouver deux fonctions de répartition l'une F_d en escalier, l'autre F_c continue, telles que F soit décomposable en :

$$F = \lambda_1 F_d + \lambda_2 F_c$$

où λ_1 et λ_2 sont deux réels, que l'on déterminera, satisfaisant aux conditions

$$0 \leqslant \lambda_1 \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant \lambda_2 \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = 1$$

(b) Une telle décomposition de F est-elle unique ?