CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION GENERALE

MATHEMATIQUES I

Année 1979

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Dans ce problème, on note

- J l'ensemble $\{1,2,3\}$
- M une matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels, d'élément générique a_{ij}, i étant l'indice de ligne, j l'indice de colonne.
- λ_1, λ_2, λ_3 les valeurs propres réelles ou complexes, distinctes ou confondues de M et $|\lambda_1|$, $|\lambda_2|$, $|\lambda_3|$ leurs modules.
- I la matrice unité de dimension 3
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- $\operatorname{tr}(M)$ le nombre : $\sum\limits_{i\in J} a_{ii}$ appelé trace de la matrice M

PARTIE I

1. Démontrer que $\operatorname{tr}(M) = \sum\limits_{i\in J} \lambda_i$
2. Démontrer que l'une, au moins, des valeurs propres de M est réelle.
3. Soit M^2 le carré de la matrice M. Démontrer que pour tout $i \in J$, λ_i^2 est valeur propre de M^2.
Réciproquement, si μ est une valeur propre de la matrice M^2, démontrer que l'une au moins des racines carrées (dans $\mathbb{C}$) de μ est valeur propre de M (on pourra poser $\mu = \omega^2$)
Quelle conclusion dégage-t-on de cette étude ?

PARTIE II

Dans cette partie, on suppose que M satisfait à la condition (1) suivante :

$$(1) \qquad \exists k \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \text{tel que} \quad \operatorname{tr} M = k \quad \text{et} \quad \operatorname{tr}(M^2) = k^2$$

1. Démontrer que M admet au moins une valeur propre réelle non nulle.
2. On suppose $\lambda_1 > k$.
   (a) Démontrer que les deux autres valeurs propres λ_2 et λ_3 sont non réelles ou nulles.
   (b) Démontrer que $|\lambda_2| < \lambda_1$ et $|\lambda_3| < \lambda_1$.

PARTIE III

Dans cette partie, on suppose que M satisfait à la condition (2) suivante :

$$(2) \qquad \forall (i,j) \in J^2, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}_+^\times \quad \text{et} \quad a_{ij} = \frac{1}{a_{ij}}$$

1. Pour cette question, on suppose, de plus, M singulière (c'est-à-dire non inversible).
   (a) Déterminer les valeurs propres de M.
   (b) Démontrer que les vecteurs colonnes de M sont vecteurs propres de M. A quelle(s) valeur(s) propre(s) sont associés ces vecteurs propres ?
   (c) Démontrer que M satisfait à la condition (3) suivante :

   $$(3) \qquad \forall n \in \mathbb{N}^\times, \qquad M^n = 3^{n-1} M$$

   (d) Soit $\Delta(\lambda) = a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$, le déterminant de la matrice $M - \lambda I$, où λ est un complexe. Déduire de (3) que, si on note $\Delta(M)$ la matrice :

   $$a_3M^3 + a_2M^2 + a_1M + a_0I,$$

   alors $\Delta(M)$ est la matrice nulle.
   (e) Peut-on trouver un polynôme φ à coefficients réels de degré strictement inférieur à trois tel que $\varphi(M)$ soit la matrice nulle ?
2. Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que M soit singulière est :

   $$\forall (i,j,k) \in J^3, \qquad a_{ik}.a_{kj} = a_{ij}.$$

3. (a) Démontrer que si M est régulière (c'est-à-dire inversible) elle admet alors une seule valeur propre réelle λ_1 et que $\lambda_1 > 3$.
   (b) En déduire que $|\lambda_2| < \lambda_1$ et $|\lambda_3| < \lambda_1$.
4. Démontrer que M est singulière si et seulement elle admet la valeur propre 3.

PARTIE IV

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ étant rapporté à la base canonique B_0, soit f_1 l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base B_0 est :

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{x} & \dfrac{1}{xz} \\ x & 1 & \dfrac{1}{z} \\ xz & z & 1 \end{pmatrix}, \qquad x > 0 \quad \text{et} \quad z > 0.$$

1. Déterminer dans la base B_1 définie par les vecteurs :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ xz \end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \qquad V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -z \end{pmatrix}$$

   la matrice T_0 de l'endomorphisme f_1.

2. Soit f_α l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice T_α dans la base B_1 est définie par :

$$T_\alpha = T_0 + \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Montrer que quel que soit α réel, $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 3$, T_α est singulière et possède trois valeurs propres distinctes de que l'on déterminera.

3. (a) Déterminer la matrice M_α de l'endomorphisme f_α dans la base B_0.
   (b) Déterminer une base B_2 de $\mathbb{R}^3$ dont les vecteurs sont, pour tout α réel, $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 3$, vecteurs propres de f_α.
   (c) La matrice M_α est-elle diagonalisable ?